$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2006/06}}$

▶ Rédigez chaque partie sur une copie séparée (ou plusieurs, au besoin). Vous pouvez admettre un résultat, **à condition de le signaler clairement**. Les autres règles de présentation et de rédaction énoncées lors des précédentes DS et DM s'appliquent sans changement.

Partie I

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{g}_n : t \in [0,1] \mapsto t^n\sqrt{1-t^2}$ et $\mathbf{J}_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{g}_n(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q1}}$ La suite $(\mathbf{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que la suite $(\mathbf{J}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et précisez sa limite.

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez $\mathbf{J}_0$ au moyen d'un changement de variable « trigonométrique ».

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculez $\mathbf{J}_1$ en observant la dérivée de $t \in [0,1] \mapsto (1-t^2)^{3/2}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Simplifiez $\mathbf{Q}_n = \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n} (2k-1)$; le résultat ne devra comporter que des factorielles et des puissances de 2, à l'exclusion de tout symbole $\prod$. Vous vérifierez l'exactitude de la formule trouvée, pour $n \in [\![1,3]\!]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Au moyen d'une intégration par parties **soigneusement justifiée**, exprimez $\mathbf{J}_{n+2}$ en fonction de $\mathbf{J}_n$. En déduire la valeur de $\mathbf{J}_k$ pour $k \in [\![2,5]\!]$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire l'expression de $\mathbf{J}_{2q}$, puis celle de $\mathbf{J}_{2q+1}$; le résultat ne devra comporter que des factorielles, des puissances de 2, et au besoin le nombre π. Vérifiez que les formules obtenues concordent avec les valeurs de $\mathbf{J}_k$ obtenues à la question précédente.

$\boxed{\text{Q8}}$ Simplifiez $\mathbf{J}_{2q} \times \mathbf{J}_{2q+1}$, puis donnez un équivalent *simple* de cette quantité lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q9}}$ Justifiez l'affirmation suivante : $\mathbf{J}_{n+1}$ est équivalent à $\mathbf{J}_n$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q10}}$ En déduire un équivalent *simple* de $\mathbf{J}_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Partie II

$\boxed{\text{Q11}}$ Soit $n \geqslant 1$. Étudiez rapidement les variations de g_n.

▶ L'étude précédente montre que l'équation $\mathrm{g}_n'(t) = 0$ possède, dans l'intervalle $]0,1[$, une et une seule solution, que nous noterons a_n.

$\boxed{\text{Q12}}$ Tracez dans un même repère (unité : 10 cm) les courbes représentatives de g_1, g_2 et g_3.

$\boxed{\text{Q13}}$ Donnez un équivalent *simple* de $1 - a_n$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q14}}$ Nous noterons $b_n = \mathrm{g}_n(a_n)$. Donnez un équivalent *simple* de b_n lorsque n tend vers l'infini. Retrouvez alors l'un des résultats de Q2.

$\boxed{\text{Q15}}$ Justifiez l'existence du réel $c_n = \tan\big(\arcsin(a_n)\big)$. Donnez ensuite une expression *très simple* de c_n.

Partie III

▶ Notons $\mathrm{h}_n : t \in [0,1] \mapsto \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \mathrm{g}_k(t)$ et $\psi : u \in [0,1] \mapsto \dfrac{4u^2}{(1+u^2)^2}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Calculez la limite de $\mathrm{h}_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini ; vous distinguerez deux cas selon la valeur de $t \in [0,1]$.

▶ Cette limite dépend de $t \in [0,1]$. Nous la noterons $\mathrm{h}(t)$.

$\boxed{\text{Q17}}$ La fonction h est-elle continue sur $[0,1]$?

$\boxed{\text{Q18}}$ Pour $x \in [0,1[$, établissez, au moyen d'un changement de variable ou par toute autre méthode :

$$\int_0^x \mathrm{h}(t)\,dt = \int_1^{\mathrm{h}(x)} \psi(u)\,du$$

$\boxed{\text{Q19}}$ En remarquant que $\psi(u) = (-2u) \times \left(\dfrac{-2u}{(1+u^2)^2}\right)$, calculez $\displaystyle\int_a^b \psi(u)\,du$, pour $0 \leqslant a \leqslant b < 1$.

$\boxed{\text{Q20}}$ En déduire la valeur, pour $x \in [0,1[$, de :

$$\varphi(x) = \int_0^x \mathrm{h}(t)\,dt - 2\arctan\big(\mathrm{h}(x)\big) + \sqrt{1-x^2}$$

$\boxed{\text{Q21}}$ Calculez la limite de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{h}(t)\,dt$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

$\boxed{\text{Q22}}$ Calculez la limite, quand n tend vers l'infini, de :

$$\mathbf{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} \sqrt{\frac{2n+k}{2n-k}}$$

Partie IV

- ► Rappel : la fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est convexe si elle vérifie
$$f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$
et ce, quels que soient $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$. f est concave si $-f$ est convexe.
- ► Deuxième rappel : une CNS pour que $f : I \mapsto \mathbb{R}$ soit convexe est que, pour toute famille $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'éléments de I, et toute famille $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'éléments de $[0,1]$ vérifiant $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k = 1$:
$$f\left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k f(x_k)$$
- ► Troisième rappel : $f \in \mathcal{D}^2(I,\mathbb{R})$ est convexe ssi $f'' \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Explicitez $\mathrm{g}_1''(t)$; en déduire que g_1 est concave sur $[0,1[$, puis sur $[0,1]$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathbf{S}_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k\sqrt{n^2-k^2}$. En utilisant le résultat précédent, établissez la majoration :

$$\mathbf{S}_n \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$$

$\boxed{\text{Q25}}$ Soit $n \geqslant 2$. Calculez $\mathrm{g}_n''(t)$, pour $t \in [0,1[$; vous écrirez le résultat sous la forme :

$$\mathrm{g}_n''(t) = \frac{t^{n-2}}{(1-t^2)^{3/2}}\,\mathbf{P}_n(t)$$

où $\mathbf{P}_n$ est une fonction polynôme ; vous donnerez l'expression de $\mathbf{P}_n(t)$.

$\boxed{\text{Q26}}$ Montrez que l'équation $\mathbf{P}_n(t) = 0$ possède dans l'intervalle $]0,1[$ une et une seule solution, que nous noterons τ_n.

$\boxed{\text{Q27}}$ Que pouvez-vous dire alors, concernant la convexité de g_n ?

$\boxed{\text{Q28}}$ Quelle est la limite de τ_n lorsque n tend vers l'infini ?

$\boxed{\text{Q29}}$ Proposez un équivalent *simple* de $\mathbf{S}_n$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q30}}$ Que pensez-vous de la précision de la majoration établie à la question 24 ?