

Variante du problème 1

► Nous nous intéressons à des *mots* sur l'alphabet à quatre lettres $\{a, b, c, d\}$. Un mot de longueur $n \geq 1$ est une succession de n lettres prises dans cet alphabet ; il existe 4^n mots de longueur n . Notons :

- u_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre pair de a et un nombre pair de b ;
- v_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b ;
- w_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre impair de a et un nombre pair de b ;
- x_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre impair de a et un nombre impair de b .

Nous notons \mathcal{U}_n le vecteur (u_n, v_n, w_n, x_n) de \mathbb{R}^4 ; \mathcal{U}_n désignera également la matrice à 4 lignes et une colonne, associée naturellement à ce vecteur.

- Q1 Quelle est la valeur de $u_n + v_n + w_n + x_n$?
- Q2 Dressez un tableau donnant les valeurs de u_n, v_n, w_n et x_n pour $1 \leq n \leq 3$.
- Q3 Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n, v_n, w_n et x_n .
- Q4 Même question avec v_{n+1}, w_{n+1} et x_{n+1} .
- Q5 Explicitez la matrice M telle que $\mathcal{U}_{n+1} = M \times \mathcal{U}_n$.
- Notons φ l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 .
- Q6 Exhibez un vecteur a non nul de \mathbb{R}^4 tel que $\varphi(a) = 4a$.
- Q7 Exhibez de même un vecteur b non nul de \mathbb{R}^4 tel que $\varphi(b) = \vec{0}$.
- Q8 Exhibez deux vecteurs c et d non nuls de \mathbb{R}^4 , indépendants l'un de l'autre, et vérifiant $\varphi(c) = 2c$ et $\varphi(d) = 2d$.
- Q9 Sans calculs compliqués, montrez que la famille (a, b, c, d) est libre. Que peut-on dire de la famille \mathcal{C} ?
- Q10 Donnez une autre preuve du résultat précédent (toujours sans longs calculs).
- Q11 Explicitez la matrice D de φ dans la base \mathcal{C} .
- Q12 Explicitez la matrice de passage P de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} .
- Q13 Explicitez P^{-1} .
- Q14 Explicitez D^n , puis M^n .
- Q15 Donnez l'expression de u_n en fonction de n seul.

Prolongement du problème 2

► Rappel : la dérivée n -ième de la fonction $f : x < \ln(2) \mapsto \frac{1}{2 - e^x}$ est $x \mapsto \frac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme unitaire de degré n , défini par les relations $P_0 = 1$ et $P_{n+1} = (2 - X)XP'_n + (n + 1)XP_n$ pour $n \geq 0$.

- Q1 Pour $n \geq 1$, montrez que les coefficients de P_n sont strictement positifs (à l'exception du terme constant, dont nous savons qu'il est nul).
- Q2 Le polynôme P_n possède-t-il des racines strictement positives ?
- Q3 Soient $n \geq 0$ et $x < \ln(2)$. Quel est le signe de $f^{(n)}(x)$?
- Nous allons donner deux autres preuves du résultat précédent.
- Q4 Supposons que f et ses n premières dérivées ne prennent, sur \mathcal{I} , que des valeurs strictement positives. Montrez qu'il en est de même de $f^{(n+1)}$; vous utiliserez la formule de LEIBNIZ.
- Q5 Pour une troisième preuve de ce résultat, utilisez un raisonnement par récurrence et l'équation différentielle dont f est solution.