TD : une suite pour le DS 2006/09

Variante du problème 1

▶ Nous nous intéressons à des *mots* sur l'alphabet à quatre lettre {*a*,*b*,*c*,*d*}. Un mot de longueur $n \geqslant 1$ est une succession de n lettres prises dans cet alphabet ; il existe 4^n mots de longueur n. Notons :

- u_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre pair de a et un nombre pair de b ;
- v_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b ;
- w_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre impair de a et un nombre pair de b ;
- x_n le nombre de mots de longueur n contenant un nombre impair de a et un nombre impair de b.

Nous notons $\mathcal{U}_n$ le vecteur $(\mathrm{u}_n, \mathrm{v}_n, \mathrm{w}_n, \mathrm{x}_n)$ de $\mathbb{R}^4$; $\mathcal{U}_n$ désignera également la matrice à 4 lignes et une colonne, associée naturellement à ce vecteur.

Q1 Quelle est la valeur de $\mathrm{u}_n + \mathrm{v}_n + \mathrm{w}_n + \mathrm{x}_n$?

Q2 Dressez un tableau donnant les valeurs de u_n, v_n, w_n et x_n pour $1 \leqslant n \leqslant 3$.

Q3 Exprimez u_{n+1} en fonction de u_n, v_n, w_n et x_n.

Q4 Même question avec v_{n+1}, w_{n+1} et x_{n+1}.

Q5 Explicitez la matrice M telle que $\mathcal{U}_{n+1} = M \times \mathcal{U}_n$.

▶ Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

Q6 Exhibez un vecteur a non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(a) = 4a$.

Q7 Exhibez de même un vecteur b non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $\varphi(b) = \overrightarrow{0}$.

Q8 Exhibez deux vecteurs c et d non nuls de $\mathbb{R}^4$, indépendants l'un de l'autre, et vérifiant $\varphi(c) = 2c$ et $\varphi(d) = 2d$.

Q9 Sans calculs compliqués, montrez que la famille (a, b, c, d) est libre. Que peut-on dire de la famille $\mathcal{C}$?

Q10 Donnez une autre preuve du résultat précédent (toujours sans longs calculs).

Q11 Explicitez la matrice D de φ dans la base $\mathcal{C}$.

Q12 Explicitez la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

Q13 Explicitez P^{-1}.

Q14 Explicitez D^n, puis M^n.

Q15 Donnez l'expression de u_n en fonction de n seul.

Prolongement du problème 2

▶ Rappel : la dérivée n-ième de la fonction $f : x < \ln(2) \mapsto \dfrac{1}{2 - e^x}$ est $x \mapsto \dfrac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}}$, où P_n est un polynôme unitaire de degré n, défini par les relations $P_0 = 1$ et $P_{n+1} = (2 - X)XP_n' + (n + 1)XP_n$ pour $n \geqslant 0$.

Q1 Pour $n \geqslant 1$, montrez que les coefficients de P_n sont strictement positifs (à l'exception du terme constant, dont nous savons qu'il est nul).

Q2 Le polynôme P_n possède-t-il des racines strictement positives ?

Q3 Soient $n \geqslant 0$ et $x < \ln(2)$. Quel est le signe de $f^{(n)}(x)$?

▶ Nous allons donner deux autres preuves du résultat précédent.

Q4 Supposons que f et ses n premières dérivées ne prennent, sur $\mathcal{I}$, que des valeurs strictement positives. Montrez qu'il en est de même de $f^{(n+1)}$; vous utiliserez la formule de Leibniz.

Q5 Pour une troisième preuve de ce résultat, utilisez un raisonnement par récurrence et l'équation différentielle dont f est solution.