► Nous étudions $\Psi : \mathbf{Q} \in \mathbb{R}[X] \mapsto (X^2-1)\,\mathbf{Q}'' + 4X\,\mathbf{Q}'$. Nous noterons indifféremment $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Q}(X)$.

Q1 Justifiez : Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2 Soit $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Prouvez que $\Psi(\mathbf{Q})$ est lui aussi de degré n. Notant a le coefficient dominant de $\mathbf{Q}$, vous expliciterez le coefficient dominant de $\Psi(\mathbf{Q})$ en fonction de a et de n.

Q3 Déterminez le noyau de Ψ.

Q4 Justifiez : Ψ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que nous noterons Ψ_n dans la suite.

Q5 Explicitez la matrice $\mathbf{J}_3$ de Ψ_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q6 Notons $\mathbf{J}_n$ la matrice de Ψ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculez la trace de $\mathbf{J}_n$; rappel : la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.

► Soit $k \in \mathbb{R}$. Nous nous intéressons à l'équation $\Psi(\mathbf{Q}) = k\,\mathbf{Q}$, équation que nous noterons $\mathcal{E}_k$ dans la suite.

Q7 Justifiez : l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_k$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.

Q8 Soit $\mathbf{Q}$ une solution non nulle de $\mathcal{E}_k$. Quelle relation a-t-on entre k et le degré n de P ?

► Dans les trois questions suivantes, nous supposons que $\mathcal{E}_k$ possède une solution $\mathbf{Q}$ unitaire de degré n. Notons $\mathbf{S}$ le polynôme $(-1)^n\,\mathbf{Q}(-X)$.

Q9 Montrez que $\mathbf{S}$ est aussi une solution de $\mathcal{E}_k$.

Q10 Que pouvez-vous dire du degré de $\mathbf{Q} - \mathbf{S}$?

Q11 En déduire $\mathbf{Q} = \mathbf{S}$; quelle est la parité de $\mathbf{Q}$?

► Pour $n \geqslant 0$ fixé, nous nous proposons de montrer que l'équation $\mathcal{E}_k$ possède *effectivement* une solution $\mathbf{Q}_n$ unitaire de degré n.

Q12 Déterminez $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$.

Q13 Soit $\mathbf{Q}_n$ répondant à la question. Justifiez l'existence d'une famille $(a_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ vérifiant $a_0 = 1$ et $\mathbf{Q}_n = \sum\limits_{0 \leqslant 2j \leqslant n} a_j X^{n-2j}$.

Q14 Montrez que $\mathbf{Q}_n$ est solution de $\mathcal{E}_k$ ssi on a, pour tout j vérifiant $2 \leqslant 2j \leqslant n$:

$$2j(2j-2n-3)a_j = (n-2j+2)(n-2j+1)a_{j-1}$$

Q15 Justifiez alors l'existence de $\mathbf{Q}_n$.

Q16 Donnez une expression simple de a_j, ne faisant intervenir aucun symbole $\prod$. Une écriture faisant intervenir *trois* coefficients binomiaux est possible, et sera appréciée comme il se doit.