Partie 1

► Rappel : $\mathbb{R}_+$ désigne l'intervalle $[0,+\infty[$. Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

Q1 Soit $f \in \mathcal{E}$. Justifiez **rigoureusement** l'existence de la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

ainsi que son appartenance à $\mathcal{E}$. Désormais, cette fonction sera notée $\Phi(f)$. Nous définissons ainsi une fonction Φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Q2 Soient $f \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Que pensez-vous des notations $\big(\Phi(f)\big)(x)$, $\Phi(f)(x)$ et $\Phi\big(f(x)\big)$?

Q3 Prouvez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Q4 Soient $f \in \mathcal{E}$ et $F = \Phi(f)$. Combien vaut $F(0)$? Φ est-il surjectif ?

Q5 Φ est-il injectif ?

Q6 Soit $F \in \mathcal{E}$ vérifiant $F(0) = 0$. Montrez qu'il existe un et un seul élément f de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f) = F$. Vous expliciterez f en fonction de F.

► Rappel : une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, est dite *bornée* s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\big|f(x)\big| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Notez bien que M dépend de f.

► Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont bornés.

Q7 Montrez que $\mathcal{B}$ est stable par Φ.

Q8 Donnez un autre exemple **intéressant** de s.e.v. de $\mathcal{E}$ stable par Φ. Bien entendu, vous donnerez une preuve à l'appui de votre exemple !

Partie 2

► Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous identifions le polynôme X^n et la fonction polyôme $t \in \mathbb{R} \mapsto t^n$, et nous notons $G_n = \Phi(X^n)$. Ainsi, $G_0(x) = 1 - e^{-x}$.

Q1 Explicitez $G_n(x)$ pour $n \in [\![1,3]\!]$; vous justifierez soigneusement (ça vous changera !) les intégrations par parties que vous effectuerez.

Q2 Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel ℓ_n et un polynôme P_n tels que $G_n(x) = \ell_n + P_n(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q3 Quel est le degré de P_n ?

Q4 Donnez l'expression exacte de ℓ_n.