Sup PCSI2 — Devoir 2006/05

- Petit rappel à lire **attentivement**. Toute copie sans nom, ou trop raturée, ou avec des écritures dans les marges, ou avec des écritures au crayon, ou avec un orthographe trop fantaisiste, ou avec des soustractions d'inégalités (ou tout autre crime contre le bon sens mathématique) recevra la note zéro. Qu'on se le dise.
- Notons $f : x > 0 \mapsto x^x$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez l'affirmation suivante : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez $f'(x)$, puis $f''(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que f est prolongeable par continuité à droite de 0. Nous noterons encore f la fonction ainsi prolongée.

$\boxed{\text{Q4}}$ f est-elle dérivable à droite de 0 ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Étudiez rapidement les variations de f, puis tracez sa courbe représentative.

- Pour $n \geqslant 0$, notons $a_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculez a_0, a_1 et a_2.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre *très simple*.

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $k \geqslant 1$ et $x > 0$, démontrez la formule $\dfrac{d^k}{dx^k}\big(\ln(x)\big) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Énoncez la formule de Leibniz. Aucune démonstration n'est demandée !

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour $n \geqslant 1$, établissez la relation $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(a_n - \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{(-1)^k a_{n-k}}{k}\right)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Utilisez cette formule pour calculer a_3, a_4 et a_5.

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrez que $|a_n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que l'on a même $|a_n| < 1$ pour $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Notons $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$. Montrez que $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1 + H_n}{n+1}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Quelle est la limite de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$?