Sup PCSI2 — Devoir 2006/03

Q1 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudiez les variations de la fonction $f : t > 0 \mapsto (p-1)t + \dfrac{a^p}{t^{p-1}}$, et montrez que $f(t) \geqslant pa$ pour tout $t > 0$.

► Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Notons $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $g(x) = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}$.

Q2 Établissez $g(x) \leqslant m(x)$ ; vous procéderez par récurrence sur $n$, en utilisant l'inégalité de Q1 avec $t = \sqrt[n]{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k}$, et un choix judicieux de $a$ et $p$.

► Notons $h(x)$ le réel défini par la relation $\dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$.

Q3 Établissez $h(x) \leqslant g(x)$.

► $u_0$, $v_0$ et $w_0$ sont trois réels qui vérifient $0 < w_0 \leqslant v_0 \leqslant u_0$.

Q4 Montrez que les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} \qquad v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \qquad \frac{1}{w_{n+1}} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n}\Big)$$

permettent de définir **effectivement** trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ de réels strictement positifs.

Q5 Établissez $0 < w_n \leqslant v_n \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q6 Montrer que les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ sont monotones, en précisant le sens de variation de chacune d'elles.

Q7 Montrer que les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ convergent.

Q8 Pour $n \in \mathbb{N}$, établissez l'égalité $u_{n+1} - w_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}(u_n - w_n)$.

Q9 En déduire que les trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent vers la même limite.

Q10 Pour quels $n$-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels strictement positifs a-t-on l'égalité $g(x) = m(x)$ ?

Q11 Qu'en-est-il de l'égalité $h(x) = g(x)$ ?