

Obligatoires : une copie par partie (plusieurs au besoin) ; numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.

Interdits : encre rouge, crayon, tippex, calculatrice, saleté excessive.

Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Problème 1

► Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Notons \mathcal{E} l'équation différentielle $y' \cdot \ln(y) = 1$. Nous dirons qu'une fonction f appartenant à $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}_+^*)$ est une solution sur I de \mathcal{E} si elle vérifie $f'(x) \cdot \ln(f(x)) = 1$ pour tout $x \in I$.

Q1 Soit f une solution sur I de \mathcal{E} ; montrez qu'une et une seule des deux affirmations suivantes est vraie :

- (1) pour tout $x \in I$, $f(x) > 1$
- (2) pour tout $x \in I$, $0 < f(x) < 1$

Q2 Montrez que, si f est une solution sur I de \mathcal{E} , alors $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Q3 Soit f une solution sur I de \mathcal{E} ; exprimez f'' en fonction de f uniquement (c'est-à-dire : sans utiliser f').

► Dans toute la suite, nous fixons $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 > 1$. Nous noterons I l'intervalle $[x_0, +\infty[$, et nous admettrons qu'il existe une et une seule solution f de \mathcal{E} sur I vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Q4 Déterminez le sens de variation de f , ainsi que celui de f' .

Q5 Justifiez l'existence de $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, et précisez le signe de ℓ .

Q6 Montrez que l'hypothèse « f est majorée » mène à une contradiction. Quelles conclusions pouvez-vous en tirer concernant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et ℓ ?

Q7 Soit $\varepsilon > 0$. Justifiez l'existence de $A_\varepsilon \geq x_0$ tel que $f'(t) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \geq A_\varepsilon$.

Q8 Pour $x \geq A_\varepsilon$, justifiez la majoration : $f(x) \leq \frac{\varepsilon x}{2} + f(A_\varepsilon) - \frac{\varepsilon A_\varepsilon}{2}$.

Q9 Justifiez alors l'existence de $B_\varepsilon \geq x_0$ tel que $\frac{f(x)}{x} \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq B_\varepsilon$.

Q10 Quelle conclusion pouvez-vous en tirer concernant la limite de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Q11 Que pouvez-vous dire de la branche infinie de la courbe représentative de f ?

Problème 2

► Il est vivement conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de s'attaquer à la résolution.

► Notons φ la fonction qui, à $P \in \mathbb{R}[X]$, associe $\varphi(P) = P(X+1) - X^2 P''(X-1)$.

Q1 Justifiez *en toute rigueur* le fait que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2 Donnez une expression *simple* du terme constant de $\varphi(P)$ en fonction de P .

Q3 L'équation $n^2 = n + 1$ possède-t-elle des solutions dans \mathbb{N} ?

Q4 Soit P non nul, de degré n , de coefficient dominant α . Montrez que $\varphi(P)$ a même degré que P , et explicitez son coefficient dominant en fonction de α et de n ; au besoin vous distinguerez plusieurs cas de figure dans la discussion, mais cette dernière devra déboucher sur une formule *unique* valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q5 Justifiez l'existence de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ . Vous le noterez désormais φ_n ; nous avons donc $\varphi_n(P) = \varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

► Notons \mathcal{B}_3 la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q6 Calculez l'image par φ_3 de chacun des éléments de \mathcal{B}_3 . En déduire la matrice A de φ_3 dans \mathcal{B}_3 .

Q7 Prouvez que φ_3 est bijectif.

Q8 Calculez la matrice inverse A^{-1} de A . Les étapes du calcul devront figurer sur votre copie !

Q9 Justifiez l'affirmation suivante : φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q10 Justifiez l'affirmation suivante : φ est injectif.

Q11 Justifiez l'affirmation suivante : φ est surjectif.

► Fixons $n \in \mathbb{N}$ et notons A la matrice de φ_n dans la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme A est une matrice carrée d'ordre $n+1$, nous ferons varier les indices de ligne et de colonne dans l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$, pour plus de commodité.

Q12 Combien vaut $A_{0,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$?

Q13 Combien vaut $A_{j,k}$ pour $0 \leq k < j \leq n$?

Q14 Combien vaut $A_{1,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$?

Q15 Combien vaut $A_{2,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$?

Q16 Combien vaut $A_{k,k}$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$?

Q17 Calculez la trace de A : $\text{tr}(A) = \sum_{0 \leq k \leq n} A_{k,k}$.