Sup PCSI2 — Contrôle 2005/08

Obligatoires : une copie par partie (plusieurs au besoin) ; numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Exercice 1

► Voici des assertions au sujet de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple, et en expliquant pourquoi il convient).

Q1 Si f et fg sont continues, alors g est continue.

Q2 Si f et g sont lipschitziennes, alors $f - g$ est lipschitzienne.

Q3 Si f est lipschitzienne, alors elle possède des primitives.

Q4 Si f est dérivable et périodique, alors f' est périodique.

Q5 Si f est continue et périodique, alors toutes ses primitives sont périodiques.

Q6 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique, alors f est lipschitzienne.

Q7 $\star\star$ Si f est continue et périodique, alors f est lipschitzienne.

Exercice 2

► Voici des assertions au sujet de matrices carrées d'ordre 2, à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple, et en expliquant pourquoi il convient).

Q1 Si A et B sont symétriques, alors $A + B$ est symétrique.

Q2 Si A et B sont symétriques, alors AB est symétrique.

Q3 Si A et B sont inversibles, alors $A + B$ est inversible.

Q4 Si $A + B$ est inversible, alors A et B sont inversibles.

Q5 Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible.

Q6 Si AB est inversible, alors A et B sont inversibles.

Q7 AB et BA ont même rang.

Q8 AB et BA ont même trace.

Q9 Si $\mathrm{rg}(A) = 2$, alors $\mathrm{rg}(A^2) = 2$.

Q10 Si $\mathrm{rg}(A^2) = 2$, alors $\mathrm{rg}(A) = 2$.

Q11 Si $\mathrm{rg}(A) = 1$, alors $\mathrm{rg}(A^2) = 1$.

Q12 Si $\mathrm{rg}(A^2) = 1$, alors $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Q13 Si $\mathrm{rg}(A) = 0$, alors $\mathrm{rg}(A^2) = 0$.

Q14 Si $\mathrm{rg}(A^2) = 0$, alors $\mathrm{rg}(A) = 0$.

Q15 Si $\mathrm{rg}(A) = 0$, alors $\det(A) = 0$.

Q16 Si $\det(A) = 0$, alors $\mathrm{rg}(A) = 0$.

Q17 Si $\det(A^2) = 0$, alors $\mathrm{rg}(A) = 0$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 (E.M. Lyon 2001)

► Rappel : il est essentiel de faire la différence entre la fonction f et le réel $f(x)$, image par f du réel x. Tout manquement à ce rappel sera lourdement sanctionné. Qu'on se le dise.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Justifiez l'existence de la fonction $F : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x \big(f(t)+f(t^2)\big)\,dt$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Vous expliciterez $F'(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors F est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

► Notons désormais Φ la fonction qui, à $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ associe $\Phi(f) = F$ où F a été définie à la question 1.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Des trois notations $\big(\Phi(f)\big)(x)$, $\Phi\big(f(x)\big)$ et $\Phi(f)(x)$, lesquelles ont un sens ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Combien vaut $\big(\Phi(f)\big)(0)$?

$\boxed{\text{Q6}}$ Φ est-il surjectif ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Nous savons que $\mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrez que ce s.e.v. est stable par Φ.

► Dans les cinq questions suivantes, nous étudions l'injectivité éventuelle de Φ. Soit $f \in \ker(\Phi)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit $t \in [0,1]$. Quelle relation simple existe-t-il entre $f(t)$ et $f(t^2)$?

$\boxed{\text{Q10}}$ Combien valent $f(0)$ et $f(1)$?

► Supposons qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $f(x) \neq 0$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = (x_n)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de cette suite ?

$\boxed{\text{Q12}}$ Observez la suite de terme général $f(x_n)$ et mettez en évidence une contradiction.

$\boxed{\text{Q13}}$ Φ est-il injectif ?