$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2005/07}}$

Obligatoires : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

Exercice 1

► Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et g une fonction définie sur $\mathcal{I}$ et à valeurs réelles.

$\boxed{\text{Q1}}$ Que signifie l'assertion $\boxed{\mathcal{I} \text{ est borné}}$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Que signifie l'assertion $\boxed{g \text{ est majorée}}$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Que signifie l'assertion $\boxed{g \text{ est lipschitzienne}}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Que signifie l'assertion $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1}$?

$\boxed{\text{Q5}}$ g peut-elle être de classe $\mathcal{C}^1$ sans être lipschitzienne ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Si $\mathcal{I}$ est borné et si g est lipschitzienne, g est-elle nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$?

$\boxed{\text{Q7}}$ Avez-vous une remarque **intelligente** à faire, concernant l'énoncé de la question 6 ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Si $\mathcal{I}$ est borné et si g est de classe $\mathcal{C}^1$, g est-elle nécessairement lipschitzienne ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Supposons g de classe $\mathcal{C}^1$. Énoncez et démontrez une condition suffisante portant sur $\mathcal{I}$, pour que g soit lipschitzienne. Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 2

► E est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque ; p et q sont deux endomorphismes de E. Nous noterons pq pour $p \circ q$, et p^2 pour $p \circ p$. Rappel : un projecteur de E est un endomorphisme de E p tel que $p^2 = p$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que si p est un projecteur de E, alors $\ker(p)$ et $\operatorname{im}(p)$ sont supplémentaires.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit f un endomorphisme de E vérifiant $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$. f est-il nécessairement un projecteur ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit p un projecteur de E. Quels sont les scalaires λ tels que λp soit un projecteur ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit p un projecteur de E. Notons i l'automorphisme identité de E. Existe-t-il des scalaires λ tels que $p + \lambda i$ soit un projecteur ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $p \circ p$ est un projecteur. p est-il nécessairement un projecteur ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Dans cette question, nous supposons que p et pq sont des projecteurs. Montrez que pqp est un projecteur.

$\boxed{\text{Q7}}$ Construisez un exemple dans lequel p et pqp sont des projecteurs, mais pas pq.

$\boxed{\text{Q8}}$ Construisez un exemple dans lequel p et pqp sont des projecteurs, mais pas qp.

$\boxed{\text{Q9}}$ Construisez un exemple dans lequel ni p, ni q, ni pqp ne sont des projecteurs, tandis que pq en est un.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(3x)$, $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x)$ et $= \left\{ af + bg + ch + dk \;\middle|\; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$. Pour faciliter la rédaction, vous pourrez noter $\varphi_{a,b,c,d}$ la fonction $af + bg + ch + dk$.

$\boxed{\text{Q1}}$ $\mathcal{B} = (f, g, h, k)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q3}}$ La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de ?

$\boxed{\text{Q4}}$ La fonction $p : x \mapsto \sin^3(x) - \cos^3(x)$ appartient-elle à ?

$\boxed{\text{Q5}}$ La fonction $q : x \mapsto 1$ appartient-elle à ?

$\boxed{\text{Q6}}$ La fonction $q : x \mapsto x$ appartient-elle à ?

$\boxed{\text{Q7}}$ La fonction $\mathcal{D} : \varphi \mapsto \varphi'$ est-elle un endomorphisme de ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle est la matrice M de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$?

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, explicitez M^n ; vous distinguerez deux cas de figure, selon la parité de n.

$\boxed{\text{Q10}}$ La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice inverse M^{-1} de M.