Sup PCSI2 — Contrôle 2005/06

Obligatoires : numérotation des copies de $1/n$ à n/n ; votre nom sur chaque copie ; numérotation des questions ; résolution dans l'ordre de l'énoncé ; au moins une ligne sautée entre deux questions consécutives.
Interdits : encre rouge, crayon, tippex, saleté excessive.
Recommandés : preuves rigoureuses et concises ; présentation soignée ; orthographe tolérable.

▶ Notons $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto t + \arctan(t)$.

Q1 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(t) = 0$.

▶ Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\varphi(t)}$.

Q2 Quel est l'ensemble de définition de F ?

Q3 Pour $x > 0$, quel est le signe de $F(x)$? Et pour $x < 0$?

Q4 F possède-t-elle une parité ?

Q5 Montrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et explicitez $F'(x)$.

Q6 Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q7 Rappelez la formule exprimant $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$. Aucune preuve n'est demandée.

Q8 Pour $x > 0$, établissez l'inégalité $\arctan(2x) < 2\arctan(x)$.

Q9 Quel est le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+^*$?

▶ Nous nous proposons d'étudier le comportement de F au voisinage de $+\infty$.

Q10 Pour $t > 0$, justifiez l'inégalité $\dfrac{1}{\varphi(t)} < \dfrac{1}{t}$.

Q11 En déduire que F est majorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q12 Sans autre calcul, montrez que $F(x)$ possède, lorsque x tend vers $+\infty$, une limite ℓ que nous allons déterminer.

Q13 Pour $t > 0$, justifiez l'inégalité $\dfrac{1}{t + \frac{\pi}{2}} < \dfrac{1}{\varphi(t)}$.

Q14 En déduire un encadrement de $F(x)$, puis la valeur de ℓ.

▶ Nous étudions maintenant le comportement de F à droite de 0.

Q15 Sans aucun calcul, prouvez que F possède une limite à droite de 0, qui sera notée λ dans la suite.

Q16 Pour $u \in \mathbb{R}$, prouvez l'encadrement $1 - u^2 \leqslant \dfrac{1}{1+u^2} \leqslant 1$.

Q17 En déduire un encadrement de $\arctan(t)$ valable pour $t > 0$.

Q18 En déduire, pour $0 < t \leqslant 1$, l'encadrement $\dfrac{1}{2t} < \dfrac{1}{\varphi(t)} \leqslant \dfrac{3}{t(6-t^2)}$.

Q19 Supposons toujours $0 < t \leqslant 1$; prouvez l'inégalité $\dfrac{1}{6-t^2} \leqslant \dfrac{1+t^2}{6}$.

Q20 En déduire un encadrement de $F(x)$ valable pour $0 < x \leqslant 1/2$.

Q21 En déduire la valeur de λ.

Q22 F peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Q23 ⋆⋆ F' possède-t-elle une limite à droite de 0 ? Indication : $\arctan(u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$.

Q24 Donnez l'allure de la courbe représentative de F.