$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2005/03}}$

► Avant de lire l'énoncé, prenez connaissance des directives énumérées en bas de la deuxième page !

Exercice 1 : les traditionnelles questions de bon sens sur les suites

► *Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Les réponses qui ne sont pas accompagnées d'une preuve ou d'un contre-exemple ne seront pas prises en compte. Toutes les suites considérées sont des suites de réels.*

$\boxed{\text{Q1}}$ Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $u_n = \mathcal{O}(w_n)$, alors $u_n = \mathcal{O}(v_n + w_n)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si la suite (u_n) est bornée, alors la suite de terme général $v_n = u_n + \dfrac{1}{|u_n| + 1}$ est bornée.

$\boxed{\text{Q3}}$ Si la suite de terme général $v_n = u_n + \dfrac{1}{|u_n| + 1}$ est bornée, alors la suite (u_n) est bornée.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{1 + e^{u_n}}$ est bornée, alors la suite (u_n) est bornée.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{1 + e^{u_n}}$ converge, alors la suite (u_n) converge.

$\boxed{\text{Q6}}$ Si la suite de terme général $v_n = \dfrac{1}{1 + e^{u_n}}$ diverge, alors la suite (u_n) diverge.

$\boxed{\text{Q7}}$ Si la suite (u_n) converge, alors la suite de terme général $u_{2n} - u_n$ converge.

$\boxed{\text{Q8}}$ Si la suite de terme général $u_{2n} - u_n$ converge vers 0, alors la suite (u_n) converge.

$\boxed{\text{Q9}}$ Si les suites de termes généraux respectifs $u_n - v_n$ et $u_n v_n$ convergent, alors les suites (u_n) et (v_n) convergent.

$\boxed{\text{Q10}}$ $\star\star\star$ Si les suites de termes généraux respectifs $u_n - v_n$ et $u_n v_n$ sont bornées, alors les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Exercice 2 : en passant par le métro Parmentier…

► Notez bien que, dans cet exercice, ${u_n}^2$ désigne le carré de u_n, et non le terme d'indice n^2 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que la donnée de $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n}$ définissent *effectivement* une suite de réels. Vous utiliserez un raisonnement par récurrence.

$\boxed{\text{Q2}}$ Dressez un tableau donnant les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4. Vous présenterez les résultats sous forme de fractions irréductibles ; les calculs ne devront pas apparaître sur la copie.

$\boxed{\text{Q3}}$ Étudiez le sens de variation de cette suite.

$\boxed{\text{Q4}}$ Notre suite converge-t-elle ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculez $\lim\limits_{n\to\infty} \left({u_{n+1}}^2 - {u_n}^2\right)$.

► Notons $v_n = \dfrac{{u_n}^2}{4}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Justifiez la majoration $v_{n+1} - v_n > 1$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire $v_n > n$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $n \geqslant 1$, établissez $v_{n+1} - v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $n \geqslant 2$, justifiez : $\dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Toujours pour $n \geqslant 2$, en déduire la majoration $v_n \leqslant n + \ln(n) + 2$.

$\boxed{\text{Q11}}$ En déduire la limite, quand n tend vers l'infini, de $\dfrac{v_n}{n}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Exhibez $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\lambda n^\alpha} = 1$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : trigonométrie un jour, trigonométrie toujours

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour $x \geqslant \pi$, établissez l'inégalité $\left|\sin(x)\right| < x$.

► Pour $k \geqslant 1$, nous noterons $\mathcal{I}_k$ l'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$. Rappel : la fonction cotan est définie par la relation $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez deux expressions de $\operatorname{cotan}'(x)$, pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que, dans l'intervalle $\mathcal{I}_k$, l'équation $\operatorname{cotan}(x) = 1/x$ possède une et une seule solution, qui sera notée x_k désormais.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quel est le plus grand des deux réels x_k et $k\pi + \frac{\pi}{2}$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

$\boxed{\text{Q6}}$ La suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ converge-t-elle ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Donnez un équivalent *très simple* de x_k lorsque k tend vers l'infini.

► Nous noterons $y_k = x_k - k\pi$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que la suite $(y_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée.

$\boxed{\text{Q9}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(y_k)_{k\geqslant 1}$?

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que la suite $(y_k)_{k\geqslant 1}$ converge.

$\boxed{\text{Q11}}$ Déterminez la limite ℓ de la suite $(y_k)_{k\geqslant 1}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Quelle relation simple existe-t-il entre $\arctan(x)$ et $\arctan(1/x)$, pour $x \neq 0$? Bien entendu, vous donnerez une preuve !

$\boxed{\text{Q13}}$ Donnez un équivalent *simple* de $\ell - y_k$ lorsque k tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q14}}$ Quel développement asymptotique de x_k déduit-on des résultats précédents ?

Consignes de rédaction et de présentation

► Mettez votre nom sur chaque copie. Rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). N'utilisez ni encre rouge, ni crayon. Encadrez les résultats. Numérotez les copies de $1/n$ à n/n (où n est le nombre de copies). Traitez les questions dans l'ordre de l'énoncé, et indiquez les numéros des questions. Séparez nettement les réponses à deux questions consécutives (en sautant au moins une ligne). L'usage d'une calculatrice est interdit.

► Ne pas respecter la totalité de ces consignes a une conséquence très simple : la copie ne sera pas corrigée, et la note attribuée sera 0.

► Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement.