$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2005/01}}$

► Avant de lire l'énoncé, prenez connaissance des directives énumérées en bas de la deuxième page !

Exercice 1

► Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres. Elles doivent toutefois être rédigées sur une même copie (plusieurs copies, au besoin).

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la formule permettant de transformer $\cos(a) + \cos(b)$ en un produit. Utilisez cette formule pour résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos(x) + \cos(4x) + \cos(7x) = 0$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin^5(2t)\, dt$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit β une solution de l'équation $z^3 - z^2 + 2z - 3 = 0$. Exprimez β^3, β^4 et β^5 en fonction de β et β^2 *uniquement*.

$\boxed{\text{Q4}}$ L'équation $\cos^3(x) - \cos(x) = \dfrac{1}{2}$ possède-t-elle des solutions réelles ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Mettez sous forme algébrique $z = (-1 + i)^A$, où A est la valeur indiquée dans la partie personnalisée.

Exercice 2

$\boxed{\text{Q1}}$ Résolvez l'équation $\mathcal{E}$ proposée dans la partie personnalisée.

Exercice 3

► Soit $n \in \mathbb{N}$. La *racine carrée entière* de n est le plus grand naturel k tel que $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$. Nous noterons $\psi(n) = k$. Par exemple, $\psi(300) = 17$ car $17^2 = 289$ et $18^2 = 324$. Notez que si n est un carré parfait, alors n est le carré de $\psi(n)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Calculez $\psi(A)$, où A est la valeur indiquée dans la partie personnalisée. Vous expliquerez comment vous avez obtenu le résultat.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soient p et q deux naturels. A-t-on nécessairement $\psi(p^2 q) = p\psi(q)$?

► Soient p et q deux naturels. Nous noterons $p \nearrow q$ lorsque $q = 4p$, et $p \searrow q$ lorsque $q = \psi(p)$. Par exemple, $7 \nearrow 28 \nearrow 112 \searrow 10 \nearrow 40 \searrow 6$.

► Un *chemin* est une suite finie d'étapes $\nearrow$ ou $\searrow$, comme celle qui a été présentée plus haut. Nous dirons qu'un tel chemin *mène* du premier nombre au dernier nombre. Nous dirons que $n \in \mathbb{N}^*$ est *accessible* s'il existe un chemin menant de 1 à n.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que tous les éléments de $[\![2,10]\!]$ sont accessibles. Vous donnerez pour chacun d'eux un chemin.

$\boxed{\text{Q4}}$ À la question précédente, vous avez exhibé un chemin menant de 1 à 8. Exhibez un deuxième chemin menant de 1 à 8, différent du précédent.

$\boxed{\text{Q5}}$ Dressez un tableau donnant la valeur de 2^k pour $10 \leqslant k \leqslant 16$. On ne demande pas les calculs, mais juste les résultats !

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que 181 est accessible.

$\boxed{\text{Q7}}$ On peut montrer que tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ sont accessibles. En admettant ce résultat, montrez que, quels que soient les éléments p et q de $\mathbb{N}^*$, il existe un chemin menant de p à q.

Tournez S.V.P.

Exercice 4

- Soit $z \in \mathbb{C}$; nous noterons $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z, et $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire. P désigne l'ensemble des complexes z tels que $\mathrm{Im}(z) > 0$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient a, b, c, d quatre réels et z un complexe tel que $cz + d \neq 0$. Établissez :

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{az+b}{cz+d}\Big) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}(ad - bc)$$

- Dans les trois questions suivantes, nous supposons $ad - bc = 1$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $z \in P$. Peut-on avoir $cz + d = 0$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $z \in P$. Prouvez l'existence de $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et montrez que $f(z)$ appartient à P.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $f(i) = i$ si et seulement si il existe un réel α tel que $a = d = \cos(\alpha)$ et $b = -c = \sin(\alpha)$.

- Rappel : pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Simplifiez $\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Exprimez $\mathrm{ch}(2x)$ et $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que vous préciserez.

$\boxed{\text{Q8}}$ Notons φ la bijection réciproque de th ; explicitez $\varphi(x)$, pour $x \in I$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$; notons $a = d = \mathrm{ch}(x)$ et $b = c = \mathrm{sh}(x)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit $z \in P$. Prouvez l'existence de $g_x(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ et montrez que $g_x(z)$ appartient à P.

$\boxed{\text{Q10}}$ Calculez $\big|g_x(i)\big|$.

$\boxed{\text{Q11}}$ $\star\star$ Soit $z \in P$. Supposons $|z| = 1$; montrez qu'il existe un et un seul réel x tel que $g_x(i) = z$. Vous expliciterez x en fonction de $u = \mathrm{Re}(z)$, $v = \mathrm{Im}(z)$ et φ.

Source : DEUG MASS Première année — Grenoble 1982 — Maths 2 — Analyse

Consignes de rédaction et de présentation

- Mettez votre nom sur chaque copie. Rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). N'utilisez ni encre rouge, ni crayon. Encadrez les résultats. Numérotez les copies de $1/n$ à n/n (où n est le nombre de copies). Traitez les questions dans l'ordre de l'énoncé, et indiquez les numéros des questions. Séparez nettement les réponses à deux questions consécutives (en sautant au moins une ligne). L'usage d'une calculatrice est interdit.
- Ne pas respecter la totalité de ces consignes a une conséquence très simple : la copie ne sera pas corrigée, et la note attribuée sera 0.
- Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement.