Sup PCSI2 — Devoir 2005/05

► Notons $\mathbf{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodiques. Par exemple, les fonctions sin et cos appartiennent à $\mathbf{E}$, ainsi que toutes les fonctions constantes.

Q1 Montrez que $\mathbf{E}$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q2 Que pensez-vous de l'affirmation suivante : si f appartient à $\mathbf{E}$, alors f est bornée ?

Q3 Que pensez-vous de l'affirmation suivante : si f appartient à $\mathbf{E}$, alors f est lipschitzienne ?

Q4 Soit $f \in \mathbf{E}$. Avec un changement de variable *très simple*, montrez que $J(f,x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} f(t)\,dt$ ne dépend pas de x.

► Pour $f \in \mathbf{E}$, nous noterons $\mu(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$.

Q5 Montrez que μ est une forme linéaire de $\mathbf{E}$.

Q6 Quelle est l'image de μ ?

Q7 Que pouvez-vous dire du noyau de μ ?

► Nous savons que la dérivation $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et que cet endomorphisme est surjectif, mais non injectif.

Q8 Montrez que $\mathbf{E}$ est stable par D.

► Notons $\widehat{D}$ l'endomorphisme de $\mathbf{E}$ induit par D.

Q9 Quel est le noyau de $\widehat{D}$?

Q10 Quelle est l'image de $\widehat{D}$?

Q11 Montrez que $\ker(\mu)$ et $\ker(\widehat{D})$ sont des s.e.v. de $\mathbf{E}$ supplémentaires l'un de l'autre.

Q12 Que pouvez-vous dire de $\mu \circ \widehat{D}$?