Sup PCSI2 — Devoir 2005/02

Q1 Soient $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$. Prouvez que la relation $u_{n+2} = \dfrac{{u_{n+1}}^2 + {u_n}^2}{u_{n+1} + u_n}$ permet de définir une suite (u_n) de réels, tous strictement positifs.

Q2 Étudiez le cas où $u_0 = u_1$.

Q3 Supposons $u_0 < u_1$. Montrez que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.

Q4 En déduire la convergence de la suite (u_n), et montrez que la limite ℓ de cette suite appartient à $]u_0, u_1[$.

Q5 Quel énoncé a-t-on lorsque $u_0 > u_1$? *Remarque* : on ne demande pas de le démontrer.

► Notons $\lambda(u_0, u_1)$ la limite de la suite définie par u_0 et u_1.

Q6 Soit $k > 0$. Quelle relation existe-t-il entre $\lambda(ku_0, ku_1)$ et $\lambda(u_0, u_1)$?

► Pour $x > 0$, notons $f(x) = \lambda(1, x)$.

Q7 Prouvez que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Q8 Établissez la formule $f(x) = xf\Big(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\Big)$.

Q9 En déduire $\mu \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\mu x^\alpha} = 1$.

Q10 Fixons $u_0 = 1$ et $u_1 = x \in]0, 1[$. Explicitez u_2 et u_3 en fonction de x.

Q11 En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Q12 Précisez le signe de $f(x) - x$, puis celui de $f(x) - x + 1$, en fonction de x.

Q13 Que pouvez-vous en déduire concernant la courbe représentative de f ?

Q14 Admettons que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Avec ces hypothèses, et les résultats établis auparavant, indiquez l'allure de la courbe représentative de f, en supposant que celle-ci est « la plus simple possible ».