Sup PCSI2 — Contrôle 2004/08

Consignes **impératives** : ni encre rouge, ni crayon, ni tippex ; séparez nettement les questions ; encadrez les résultats ; rédigez chacun des problèmes sur une copie séparée (plusieurs, au besoin) ; indiquez votre nom sur chaque copie.

Problème 1 : polynômes de Tchebychev

Préliminaires

Q1 Énoncez et démontrez la formule permettant de transformer $2\cos(a)\cos(b)$ en somme de deux cosinus.

Q2 Rappelez la définition de la fonction arccos.

Q3 Rappelez la définition de $\operatorname{ch}(x)$.

Q4 Prouvez l'égalité $\operatorname{ch}\big((n+1)x\big) + \operatorname{ch}\big((n-1)x\big) = 2\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(nx)$.

Définition et propriétés simples des polynômes de Tchebychev

► Nous nous intéressons à la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$, et la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q5 Explicitez T_2, T_3, T_4 et T_5.

Q6 Explicitez les racines respectives de T_2, T_3, T_4 et T_5.

Q7 Calculez $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

Q8 Quel est le degré de T_n ?

Q9 Que pouvez-vous dire de la famille $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$?

Q10 Quelle est la parité de T_n ?

Q11 $\star$ Quel est le coefficient dominant de T_n ?

Compléments de programme

Q12 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Prouvez que $T_n\big(\cos(x)\big) = \cos(nx)$.

► Le résultat de la question précédente pourra être admis pour résoudre les autres questions de cette partie.

Q13 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculez $\max\limits_{|x|\leqslant 1}\big|T_n(x)\big|$.

Q14 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Prouvez que $T_n\big(\operatorname{ch}(x)\big) = \operatorname{ch}(nx)$.

Q15 Montrez que T_n possède n racines réelles distinctes, et que ces racines appartiennent toutes à l'intervalle $]-1,1[$.

Q16 $\star\star$ Montrez que T_n est solution d'une équation différentielle du second ordre.

Tournez S.V.P.

Problème 2 : étude d'un opérateur intégral simple

► Rappel : $\mathbb{R}_+$ désigne l'intervalle $[0,+\infty[$. Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{E}$. Justifiez **rigoureusement** l'existence de la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

ainsi que son appartenance à $\mathcal{E}$. Désormais, cette fonction sera notée $\Phi(f)$. Nous définissons ainsi une fonction Φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soient $f \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Que pensez-vous des notations $\big(\Phi(f)\big)(x)$, $\Phi(f)(x)$ et $\Phi\big(f(x)\big)$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient $f \in \mathcal{E}$ et $F = \Phi(f)$. Combien vaut $F(0)$? Φ est-il surjectif ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Φ est-il injectif ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $F \in \mathcal{E}$ vérifiant $F(0) = 0$. Montrez qu'il existe un et un seul élément f de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f) = F$. Vous expliciterez f en fonction de F.

► Rappel : une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, est dite *bornée* s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\big|f(x)\big| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Notez bien que M dépend de f.

► Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont bornés.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que $\mathcal{B}$ est stable par Φ.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez un autre exemple **intéressant** de s.e.v. de $\mathcal{E}$ stable par Φ. Bien entendu, vous donnerez une preuve à l'appui de votre exemple !

Problème 3 (d'après une question de l'oral des Mines)

► Nous notons $H_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$. Il est connu que $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que les relations $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{u_n - 1}$ définissent **effectivement** une suite de réels.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quel est le sens de variation de cette suite ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Cette suite converge-t-elle ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour $k \geqslant 0$, justifiez l'inégalité $u_{k+1} - u_k \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q5}}$ En déduire un minorant de u_n.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $k \geqslant 0$, justifiez l'inégalité $u_{k+1} - u_k \leqslant 1 + \dfrac{1}{k+1}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire, pour $n \geqslant 1$, un majorant de u_n faisant intervenir H_n

$\boxed{\text{Q8}}$ Exhibez alors un équivalent *simple* de u_n lorsque n tend vers l'infini.