Sup PCSI2 — Contrôle 2004/07

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

**Partie I : étude de $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$**

Q1 Déterminez la limite $\ell$ de $f(x)$ quand $x$ tend vers zéro.

▶ Nous noterons encore $f$ le prolongement par continuité obtenu en posant $f(0) = \ell$.

Q2 Quelle est la parité de $f$ ?

Q3 Explicitez $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

Q4 Étudiez les variations de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.

Q5 Précisez la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Q6 Pour $x \geqslant 0$, justifiez l'encadrement $x - \dfrac{x^3}{3} \leqslant \arctan(x) \leqslant x$.

Q7 Quel encadrement de $\arctan(x)$ pouvez-vous écrire pour $x \leqslant 0$ ?

Q8 En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

Q9 Que pouvez-vous alors affirmer concernant $f'$ ?

Q10 Explicitez $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $f(1)$ et $f\left(\sqrt{3}\right)$ ; vous ne laisserez pas de radicaux aux dénominateurs.

Q11 Donnez des approximations décimales des valeurs précédentes à $10^{-1}$ près. Indication : $\pi \approx 3.15$ et $\sqrt{3} \approx 1.73$.

Q12 Tracez la courbe représentative de $f$ ; l'unité sera égale à 25 mm.

**Partie II : étude d'une primitive de $f$**

Q13 Justifiez le fait que $f$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$.

▶ Notons $F$ la primitive de $f$ qui s'annule en 0 ; nous avons donc $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Q14 Quelle est la parité de $F$ ?

▶ Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

Q15 Justifiez, pour $x \geqslant 1$, l'inégalité $F(x) \geqslant F(1) + \dfrac{\pi}{4}\ln(x)$.

Q16 En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Q17 Déterminez de même $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

Q18 Justifiez, toujours pour $x \geqslant 1$ :

$$F(x) = F(1) + \big(\arctan(x)\big) \times \big(\ln(x)\big) - \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$$

Q19 ⋆⋆ Prouvez que $\dfrac{\ln(t)}{1+t^2} \leqslant t^{-3/2}$ pour tout $t \geqslant 1$. Indication : $e > \dfrac{5}{2}$.

Q20 En déduire, toujours pour $x \geqslant 1$, un encadrement simple de $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$.

$\boxed{\text{Q21}}$ En déduire un équivalent simple de $F(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q22}}$ Soit $a > 0$ ; simplifiez $\arctan(a) + \arctan(1/a)$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Montrez alors que $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x) + O(1)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Partie III : étude de $F(x)$ lorsque $x$ tend vers zéro**

$\boxed{\text{Q24}}$ Utilisez l'encadrement de Q4 pour justifier la majoration suivante :

$$\left|F(x) - x + \frac{x^3}{18}\right| \leqslant \frac{|x|^3}{18}$$

► Nous nous proposons maintenant de donner un développement limité de $F$ à un ordre $n$ quelconque. Nous noterons $S_n(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k x^{2k}$.

$\boxed{\text{Q25}}$ Justifiez l'inégalité $\left|\dfrac{1}{1+x^2} - S_n(x)\right| \leqslant x^{2n+2}$.

$\boxed{\text{Q26}}$ Énoncez l'inégalité des accroissements finis. La démonstration n'est pas demandée.

$\boxed{\text{Q27}}$ Pour $x \geqslant 0$, prouvez l'inégalité $\left|\arctan(x) - \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$.

$\boxed{\text{Q28}}$ En déduire une majoration de $\left|F(x) - \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right|$, d'abord pour $x > 0$, puis pour $x$ quelconque.

$\boxed{\text{Q29}}$ Donnez alors le développement limité à l'ordre $n$ de $F(x)$, lorsque $x$ tend vers 0. Vous pourrez, au besoin, distinguer deux cas de figure selon la parité de $n$.

$\boxed{\text{Q30}}$ Que pensez-vous de la suite de terme général $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ ?