Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

- Notons $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Dans tout cet exercice, f désigne un élément de E. Vous noterez F la primitive de f qui s'annule en 0.

Q1 Justifiez l'existence de la fonction $G : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,dt$.

Q2 Dans cette question, nous supposons que $f(t) = \sin(2t)$. Explicitez $G(x)$; la fonction G est-elle continue en 0 ?

Q3 Dans cette question, nous supposons que $f(t) = \exp(-t)$. Explicitez $G(x)$.

Q4 Dans cette question, nous supposons que f est bornée. La fonction G est-elle bornée ?

Q5 Montrez que G est continue en 0.

Q6 Soit $x \neq 0$. Montrez que G est continue en x.

Q7 Soit $x \neq 0$. Montrez que G est dérivable en x ; vous exprimerez $G'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.

Q8 $\star\star$ Montrez que G n'est pas nécessairement dérivable en 0.

Q9 Dans cette question, nous supposons que f est k-lipschitzienne. Montrez que G est elle aussi lipschitzienne.

- Notons Φ la fonction qui, à $f \in E$, associe $\Phi(f) = G$.

Q10 Montrez que Φ est un endomorphisme de E.

Q11 Φ est-il surjectif ?

Q12 Φ est-il injectif ?

Q13 Dans cette question, nous supposons que f est une fonction polynôme de degré n. Montrez que G est elle aussi une fonction polynôme de degré n.

Exercice 2 : test de connaissances sur les fonctions

- Soit $a > 0$. f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $]0, a]$.

Q1 Donnez la définition de $\boxed{f(x) \text{ est négligeable devant } g(x) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0^+}$.

Q2 Donnez la définition de $\boxed{f(x) \text{ est dominé par } g(x) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0^+}$.

- Voici des assertions au sujet du comportement de $f(x)$ et/ou $g(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple, et en expliquant pourquoi il convient).

Q3 Si $f(x) \underset{0^+}{=} o\big(g(x)\big)$, alors $2f(x) \underset{0^+}{=} o\big(f(x) + g(x)\big)$.

Q4 Si $f(x) \underset{0^+}{=} \mathcal{O}(x)$, alors $e^{f(x)} \underset{0^+}{=} \mathcal{O}(e^x)$.

Q5 Si f et fg admettent un $DL_1(0^+)$, alors g admet un $DL_1(0^+)$.

Q6 Si $f(x) \underset{0^+}{=} o\big(g(x)\big)$, alors $\arctan\big(f(x)\big) \underset{0^+}{=} o\big(\arctan\big(g(x)\big)\big)$.

Q7 Si $\arctan\big(f(x)\big) \underset{x\to 0^+}{\sim} \arctan\big(g(x)\big)$, alors $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} g(x)$.

Q8 Si $\arccos\big(f(x)\big) \underset{0^+}{=} \mathcal{O}\big(\arccos\big(g(x)\big)\big)$, alors $f(x) \underset{0^+}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$.

Exercice 3 : quelques calculs

► Les questions suivantes sont passablement indépendantes les unes des autres !

$\boxed{\text{Q1}}$ Combien vaut $\alpha = \arccos\Big(\sin\Big(\dfrac{369\pi}{17}\Big)\Big)$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Combien vaut $\beta = \arctan\Big(\tan\Big(\dfrac{369\pi}{17}\Big)\Big)$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big|1 + 2\sin(3t)\big|\, dt$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculez la limite de la suite de terme général $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant 2n} \sin\Big(\dfrac{k\pi}{2n}\Big)\cos\Big(\dfrac{(k+1)\pi}{2n}\Big)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculez la limite de la suite de terme général $W_n = \displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n} \Big(\dfrac{5}{3}\Big)^{1-3k}$.

Exercice 4 : projecteurs (Oral École de l'air 2001)

► Deux projecteurs f et g d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E vérifient $\mathrm{im}(f) \subset \ker(g)$. Notons $\tau = f + g - f \circ g$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Que pouvez-vous dire de $g \circ f$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que τ est un projecteur.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que $\ker(\tau) = \ker(f) \cap \ker(g)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $\mathrm{im}(f)$ et $\mathrm{im}(g)$ sont en somme directe.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que $\mathrm{im}(\tau) = \mathrm{im}(f) \oplus \mathrm{im}(g)$.