Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : d'après HEC 1989, Option Générale, Maths 2

► Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $p_{n+4} = \dfrac{1}{4}\big(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous lui associons les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$m_n = \min\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big) \qquad \text{et} \qquad M_n = \max\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q1 Prouvez que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Q2 Établissez $m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0$.

Q3 En déduire que les suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et que leurs limites respectives m et M vérifient $m \leqslant M$.

Q4 Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m_n}{4}$.

Q5 Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

Q6 Établissez la majoration $M_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

Q7 En déduire $m = M$.

Q8 Concluez, pour ce qui concerne la convergence et la limite de la suite de terme général p_n.

Exercice 2

► Dans tout l'exercice, c désigne un réel strictement supérieur à 1.

Q1 Montrez que les relations $u_0 = c$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ définissent *effectivement* une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

Q2 Étudiez le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: monotonie, convergence.

Q3 A-t-on $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$?

Q4 Établissez l'encadrement $2 < (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 < 2 + u_{n+1} - u_n$.

Q5 En déduire un encadrement de $(u_n)^2$ ne faisant intervenir que n, c et u_n (à l'exclusion de tout autre terme de la suite).

Q6 Justifiez le fait que $u_n = o\big((u_n)^2\big)$ lorsque n tend vers l'infini.

Q7 En déduire un équivalent simple de u_n.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : quelques questions sur les suites !

▶ (x_n) et (y_n) sont deux suites de réels ; nous supposons $y_n \neq 0$ APCR.

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la définition de $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Rappelez la définition de $x_n = o(y_n)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Rappelez la définition de $x_n = \mathcal{O}(y_n)$.

▶ On demande, pour chaque question, une réponse (OUI ou NON) justifiée en toute rigueur ; plus précisément, une réponse *affirmative* doit être appuyée par une démonstration, tandis qu'une réponse *négative* sera étayée par un contre-exemple.

$\boxed{\text{Q4}}$ Deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient $(u_n)^2 = o\big((v_n)^2\big)$. A-t-on $u_n = o(v_n)$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient $(u_n)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} (v_n)^2$. A-t-on $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} (v_n)$?

$\boxed{\text{Q6}}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels. La suite de terme général $|u_n|$ converge vers ℓ. Se peut-il que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge ni vers $+\ell$, ni vers $-\ell$?

$\boxed{\text{Q7}}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels. La suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{1+\exp(u_n)}$ est-elle bornée ?

$\boxed{\text{Q8}}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels bornée, qui ne converge pas vers 0. $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels divergente. La suite de terme général $u_n + v_n$ est-elle nécessairement divergente ?

$\boxed{\text{Q9}}$ La suite de terme général $R_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ converge-t-elle ?

$\boxed{\text{Q10}}$ Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de réels vérifie $u_{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$. Vérifie-t-elle nécessairement $u_{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$?

$\boxed{\text{Q11}}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels. La suite de terme général $v_n = \dfrac{\arctan(u_n)}{2-\arctan(u_n)}$ est-elle bornée ?

$\boxed{\text{Q12}}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs, qui diverge vers $+\infty$. La suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{u_k}$ converge-t-elle nécessairement ?

$\boxed{\text{Q13}}$ $\star\star$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels strictement positifs, qui vérifie $n\sqrt{n} = \mathcal{O}(u_n)$. La suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{u_k}$ converge-t-elle nécessairement ?

$\boxed{\text{Q14}}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels dont aucun n'est dans $\mathbb{Z}$. Cette suite diverge vers $+\infty$. La suite de terme général $v_n = \tan\Big(\dfrac{\pi u_n}{2}\Big)$ peut-elle diverger vers $-\infty$?

Exercice 4 : une conique

▶ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Notons $\mathrm{F}(-2,5)$, $\mathrm{F}'(-2,-3)$ et $\mathrm{M}(2/5,4)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez qu'il existe une et une seule ellipse $\mathcal{E}$ passant par M et dont les foyers sont F et F'.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quelles sont les valeurs de c, a et b ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Quelle est l'excentricité de $\mathcal{E}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Donnez une équation de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Faites un dessin donnant l'allure de $\mathcal{E}$. L'unité sera égale à 2 cm.