

Q1 • Le discriminant du trinôme $1 - 2X + 3X^2$ est $\Delta = (-2)^2 + 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8 < 0$, donc ce trinôme ne s'annule pas, sur \mathbb{R} ; mieux : il est du signe du coefficient de X^2 , c'est-à-dire strictement positif. Appliquons ceci avec $X = t^2$: nous obtenons $\varphi(t) > 0$ pour tout réel t . Du coup, la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - 2t^2 + 3t^4}}$ est continue sur \mathbb{R} , en tant que composée de φ , de $u > 0 \mapsto \sqrt{u}$ et de $v > 0 \mapsto 1/v$, qui sont toutes trois continues sur leurs intervalles de définition respectifs. Donc g possède des primitives sur \mathbb{R} ; notons G l'une d'elles, alors $f(x) = G(3x) - G(x)$. Ceci montre que $f(x)$ est défini quel que soit le réel x .

Q2 • La fonction g est à valeurs strictement positives. Donc : si $x > 0$, alors $x < 3x$, puis $f(x) > 0$ car $f(x)$ est l'intégrale, sur un intervalle d'amplitude non nulle, d'une fonction continue, de signe constant, et non identiquement nulle (mieux : cette fonction ne s'annule en aucun point de cet intervalle). Si $x < 0$, alors $x > 3x$, puis $f(x) < 0$ par le même raisonnement. Enfin, $f(0) = 0$.

Q3 • La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto G(3x)$ est dérivable, en tant que composée de $x \mapsto 3x$ et de G ; par différence, f est dérivable. La formule de dérivation d'une composée nous donne :

$$f'(x) = 3G'(3x) - G'(x) = 3g(3x) - g(x) = \frac{3}{\sqrt{1 - 18x^2 + 243x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}}$$

Q4 • φ est de classe \mathcal{C}^∞ en tant que composée de trois fonctions qui le sont. Alors G , en tant que primitive de g est elle aussi de classe \mathcal{C}^∞ . Enfin, par composition et différence, f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Q5 • Nous allons effectuer le changement de variable $u = -t$ dans l'expression de $f(-x)$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t^2 + 3t^4}} = \int_x^{3x} \frac{(-du)}{\sqrt{1 - 2u^2 + 3u^4}} = - \int_x^{3x} \frac{du}{\sqrt{1 - 2u^2 + 3u^4}} = -f(x)$$

Cette relation vaut pour tout réel x . L'intervalle de définition de f est centré en 0 ; ceci montre que f est impaire.

Q6 • Rappelons que $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1 - 18x^2 + 243x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}}$. Notons $A = \sqrt{1 - 18x^2 + 243x^4}$ et $B = \sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}$. Alors :

$$f'(x) = \frac{3}{A} - \frac{1}{B} = \frac{3B - A}{AB} = \frac{9B^2 - A^2}{AB(3B + A)}$$

qui est certainement du signe de $9B^2 - A^2 = 9(1 - 2x^2 + 3x^4) - (1 - 18x^2 + 243x^4) = 8 - 216x^4 = 8(1 - 27x^4)$ ce qui termine la preuve.

Q7 • $\varphi'(t) = -4t + 12t^3 = 4t(3t^2 - 1)$; or $t \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ implique $t^2 \geq 1/3$, donc $\varphi'(t) \geq 0$. Ceci montre que φ est croissante sur \mathcal{J} .

Q8 • Soit $x \in \mathcal{J}$; nous aurons certainement $x \leq 3x$ et, pour $t \in [x, 3x]$, $\varphi(t) \geq \varphi(x) > 0$; en passant aux racines carrées puis aux inverses, il vient $\frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}$. En intégrant cette inégalité sur l'intervalle $[x, 3x]$, nous

obtenons $\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}} \leq \int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(x)}}$ soit précisément $f(x) \leq \frac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}}$

Q9 • Observons que $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, et donc en particulier pour $x \in \mathcal{J}$. Par ailleurs, en mettant en facteur x^4 dans la racine carrée, nous avons $\frac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}} = \frac{2x}{x^2\sqrt{3 - 2x^{-2} + x^{-4}}} = \frac{2}{x\sqrt{3 - 2x^{-2} + x^{-4}}}$; il est clair que cette dernière quantité tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Par encadrement, $f(x)$ tend également vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Ceci montre que \mathcal{C}_f possède une asymptote d'équation $y = 0$; la place de la courbe par rapport à cette asymptote est évidente.

Q10 • La fonction $x \geq 0 \mapsto 1 - 27x^4$ est strictement décroissante et s'annule pour $x = 1/\sqrt[4]{27}$. Numériquement, $f(1/\sqrt[4]{27}) \approx 0.765$.

x	0	$1/\sqrt[4]{27}$	$+\infty$
$f(x)$	0	↗	↘ 0+

Q11 • Nous avons $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$, donc la tangente à \mathcal{C}_f en son point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2x$.