Sup PCSI2 — Contrôle 2004/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

## Exercice 1

► $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0. $f$ est une fonction de $I$ dans $\mathbb{R}$, autre que la fonction nulle.

► Seules les réponses justifiées seront prises en compte. Vous pourrez noter $\mathbf{i}$ la fonction $x \in I \mapsto -x$.

Q1 Si $f$ est paire et dérivable, que pouvez-vous dire de $f'$ ?

Q2 Si $f$ est impaire et dérivable, que pouvez-vous dire de $f'$ ?

Q3 Si $f$ est paire et continue, que pouvez-vous dire des primitives de $f$ sur $I$ ?

Q4 Si $f$ est impaire et continue, que pouvez-vous dire des primitives de $f$ sur $I$ ?

## Exercice 2

► Notons $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto 1 - 2t^2 + 3t^4$. Nous nous intéressons à la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}}$. Nous noterons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$.

► Toute confusion entre la **fonction** $f$ et l'**expression** $f(x)$ se traduira par une note nulle pour cet exercice.

Q1 Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{I}$ de $f$ ?

Q2 Quel est le signe de $f(x)$ ?

Q3 Montrez que $f$ est dérivable sur $\mathcal{I}$, et explicitez $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{I}$.

Q4 $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{I}$ ?

Q5 $f$ possède-t-elle une parité ? Si oui, laquelle ?

Q6 Montrez que, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ a le signe de $1 - 27x^4$.

► Notons $\mathcal{J}$ l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

Q7 Montrez que $\varphi$ est croissante sur $\mathcal{J}$.

Q8 En déduire la majoration $f(x) \leqslant \dfrac{2x}{\sqrt{1 - 2x^2 + 3x^4}}$ pour $x \in \mathcal{J}$.

Q9 Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

Q10 Dressez le tableau des variations de $f$ sur $\mathbb{R}_+$.

Q11 Donnez une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abcsisse 0.

Q12 Donnez l'allure de $\mathcal{C}_f$.

**Tournez S.V.P.**

## Exercice 3 (Dijon 1975)

► Le plan ponctuel euclidien est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Notons $\mathcal{E}$ la courbe d'équation $16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$ dans ce repère.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont vous préciserez le centre $\Omega$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quelles sont les valeurs de $a$, $b$, $c$ ? Quelle est l'interprétation géométrique de chacune de ces trois quantités ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des foyers F et F$'$ de cette conique.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est l'excentricité de $\mathcal{E}$ ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Représentez $\mathcal{E}$, en prenant comme unité 1 cm.

## Exercice 4 (particulièrement niais)

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}$.

► Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 + t^2 + t + 1$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Définissez la fonction $f$ en Maple.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez les solutions (réelles et/ou complexes) de l'équation $f(t) = 0$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $f(t)$ est le produit de deux polynômes en $t$ non constants, unitaires, à coefficients réels.

► Notons $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Justifiez rapidement l'existence de $I$.

► L'étudiant Maurice Malavisé affirme que $I$ est égal à $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^4}\,dt$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Qu'en pensez-vous ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Rectifiez l'affirmation de Maurice : vous donnerez une expression de $I$ faisant intervenir la fraction $\dfrac{1-t}{1-t^4}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Justifiez rapidement l'encadrement $\dfrac{1}{4} \leqslant I \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Améliorer cet encadrement (plutôt grossier) n'est pas difficile. Commencez par établir $I \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ En vous inspirant du calcul de Maurice, prouvez la minoration $\dfrac{1}{2} \leqslant I$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Calculez l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,dt$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Et maintenant, sauriez-vous calculer $I$ ?