Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : autour de la fonction « partie entière »

Q1 Rappelez la définition de $\lfloor x \rfloor$.

► Notons f l'application qui, au réel x, associe le relatif $\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor$.

Q2 Calculez $f(2/3)$ et $f(5/6)$.

Q3 Quelle est la valeur de $f(x)$ pour $x \in [0, 1/3[$?

Q4 Montrez que f est croissante.

Q5 f est-elle strictement croissante ?

Q6 Donnez une relation simple liant $f(x+1)$ et $f(x)$.

Q7 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$.

Q8 L'équation $f(x) = 4$ possède-t-elle des solutions réelles ?

Q9 Quelle transformation simple conserve globalement la courbe représentative de f ?

Q10 Tracez la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle [0,2].

Exercice 2 : quelques calculs

► *Les questions de cet exercice sont totalement indépendantes. Elles doivent néanmoins être rédigées en détail sur une copie séparée (plusieurs, au besoin).*

Q1 Combien vaut $A = \cos\left(\dfrac{167!\pi}{2004}\right)$?

Q2 Donnez une expression simple de $B_n = \displaystyle\sum_{3 \leqslant k < n} 2^{3k-1} 3^{1-2k}$.

Q3 Calculez $J = \displaystyle\int_1^{e^2} t^4 \ln(t)\, dt$. Vous justifierez soigneusement votre méthode.

Q4 Donnez une expression *très simple* de $P = \displaystyle\prod_{0 \leqslant k \leqslant 7} \exp\left(\frac{k^2 i\pi}{14}\right)$.

Exercice 3 : autour de la fonction « arc sinus »

Q1 Rappelez la définition de la fonction arcsin.

► Notons $f : x \mapsto \arcsin(2x) + \arcsin(3x)$.

Q2 Quel est l'ensemble de définition de f ?

Q3 f possède-t-elle une parité ?

Q4 f est-elle monotone ?

Exercice 4

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Quel est le signe de I_n ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Calculez I_0 et I_1.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Que pouvez-on en déduire au sujet de la convergence et de la limite de cette suite ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Établissez la majoration $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Quelle relation très simple lie I_n et I_{n+2} ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $J_k = (-1)^k I_{2k}$. Donnez une expression simple de $J_k - J_{k+1}$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $V_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Recopiez le tableau suivant :

n	0	1	2	3
V_n				

et remplissez les cases vides. On ne demande pas les calculs, seulement les résultats, qui devront être présentés sous forme de fractions irréductibles.

$\boxed{\text{Q10}}$ Déduisez de la question 8 la limite de la suite de terme général V_n.

$\boxed{\text{Q11}}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Classez (du plus petit au plus grand) les trois nombres V_{2p}, V_{2p+1} et V_{2p+2}.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Démontrez la relation $\dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k t^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Dans cette question, nous supposons $|t| < 1$. Quelle est la limite, quand n tend vers l'infini, de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k t^{2k}$?

► Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, notons $P_n(x) = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Justifiez la relation $\arctan(x) = P_n(x) + \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.