Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Rappelez la définition de $\binom{n}{k}$.

Q2 Calculez $\binom{11}{4}$.

Q3 Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, établissez : $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$. Précisez le(s) cas où cette inégalité est stricte.

Q4 Pour $k \geqslant 4$, établissez : $2^k \leqslant k!$.

Q5 ⋆⋆ Pour $n \geqslant 1$, établissez : $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{67}{24}$.

Exercice 2

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $\zeta_{n,k} = \exp\left(\frac{2ki\pi}{n}\right)$.

Q1 Dans quel intervalle suffit-il de faire varier k pour obtenir les racines n-ièmes de 1 ?

Q2 Donnez une expression simple de $S_n = \sum_{0 \leqslant k < n} \zeta_{n,k}$. Bien entendu, vous justifierez rigoureusement votre affirmation.

Q3 Donnez une expression simple de $P_n = \prod_{0 \leqslant k < n} \zeta_{n,k}$.

Q4 Pour $n \geqslant 2$, donnez une expression simple de $U_n = \sum_{1 \leqslant k < n} \frac{1}{\zeta_{n,k}}$.

Exercice 3

► Les questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres. Elles doivent toutefois être rédigées sur une même copie (plusieurs copies, au besoin).

Q1 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2i\overline{z} + 1 = 0$.

Q2 Rappelez la formule permettant de transformer $\cos(a) + \cos(b)$ en un produit. Utilisez cette formule pour résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) = 0$.

Q3 Calculez $J = \int_0^{\pi/6} \cos^5(t)\, dt$.

Q4 Soit α une solution de l'équation $z^3 - z^2 - z - 1 = 0$. Exprimez α^3, α^4 et α^5 en fonction de α et α^2 *uniquement*.

Exercice 4

► Notons $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^4 + 4iz^3 + (3 + 12i)z^2 - (24 - 14i)z + 12 + 36i$. Nous nous intéressons à l'équation $f(z) = 0$, que nous noterons $(\mathcal{E})$.

Q1 Montrez que $(\mathcal{E})$ possède deux solutions imaginaires pures, que vous calculerez.

Q2 Déterminez les autres solutions de $(\mathcal{E})$.

Q3 Représentez, dans le plan complexe, les images des solutions de $(\mathcal{E})$.

Q4 Que pouvez-vous dire du polygone dont les sommets sont les images des solutions de $(\mathcal{E})$?