Sup PCSI2 — Devoir 2004/08

► L'inégalité de BERNOULLI affirme que $(1+a)^n \geqslant 1+na$ pour $a \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$.

Q1 Donnez **deux** preuves différentes de cette inégalité.

Q2 Nous supposons toujours $a \geqslant 0$ et $n \geqslant 2$. Montrez que $(1+a)^n = 1+na$ si et seulement si $a=0$

► Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) le nombre 1 appartient à A ;
(2) si n appartient à A, alors $2n$ appartient à A ;
(3) si $n \geqslant 2$ appartient à A, alors $n-1$ appartient à A.

► Montrons que le nombre 3 appartient à A :

$$1 \in A \text{ d'après (1)} \Rightarrow 2 \in A \text{ d'après (2)} \Rightarrow 4 \in A \text{ d'après (2)} \Rightarrow 3 \in A \text{ d'après (3)}$$

Q3 En vous inspirant de l'exemple précédent, montrez que 19 appartient à A.

► Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(k)$ l'assertion suivante : $\boxed{[\![1,2^k]\!] \subset A}$.

Q4 Montrez que $\mathcal{P}(k)$ implique $\mathcal{P}(k+1)$.

Q5 En déduire que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q6 En déduire $A = \mathbb{N}^*$.

► Soient $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. L'inégalité de CAUCHY affirme que :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\right)^n \geqslant \prod_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$$

Q7 Prouvez cette inégalité lorsque $n=2$.

Q8 Étudiez le cas d'égalité lorsque $n=2$.

► Nous nous proposons de démontrer l'inégalité de CAUCHY dans le cas général. Notons B l'ensemble des valeurs de $n \geqslant 1$ pour lesquelles l'inégalité de CAUCHY est vraie. Il est clair que 1 (et 2, d'après la question 7) appartient à B.

Q9 Supposons que $n \geqslant 1$ appartient à B. Montrez que $2n$ appartient lui aussi à B ; pour ce faire, vous remarquerez que $\displaystyle\frac{1}{2n}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2n} x_k = \frac{m_g+m_d}{2}$, où $\displaystyle m_g = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ et $\displaystyle m_d = \frac{1}{n}\sum_{n+1\leqslant k\leqslant 2n} x_k$.

Q10 Soient $n \geqslant 2$ et $x_1, \ldots, x_{n-1}$ des réels strictement positifs. Notons $\displaystyle x_n = \frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} x_k$. Montrez que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n} x_k = x_n$.

Q11 Supposons que $n \geqslant 2$ appartient à B. Utilisez la question précédente pour montrer que $n-1$ appartient lui aussi à B.

Q12 Concluez !

Q13 Proposez une interprétation géométrique de l'inégalité de CAUCHY dans le cas $n=3$.