Sup PCSI2 — Devoir 2004/05

► Soit $A =]0, +\infty[$. Une fonction $\mu : A \times A \mapsto A$ est une *moyenne* si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mu(a,b) = \mu(b,a)$ quels que soient $a > 0$ et $b > 0$;
(ii) $\mu(a,a) = a$ quel que soit $a > 0$;
(iii) $\mu(ka,kb) = k\mu(a,b)$ quels que soient $a > 0$, $b > 0$ et $k > 0$;
(iv) si $0 < a < b$, alors $a < \mu(a,b) < b$.

Q1 Vérifiez que $f : (a,b) \in A^2 \mapsto \dfrac{a+b}{2}$ est une moyenne.

Q2 Vérifiez que $g : (a,b) \in A^2 \mapsto \sqrt{ab}$ est une moyenne.

Q3 Vérifiez que $h : (a,b) \in A^2 \mapsto \dfrac{2ab}{a+b}$ est une moyenne.

Q4 Comparez $f(a,b)$, $g(a,b)$ et $h(a,b)$ lorsque $a \neq b$.

Q5 Soient p, q et r trois moyennes. Montrez que la fonction $(a,b) \in A^2 \mapsto r\big(p(a,b), q(a,b)\big)$ est encore une moyenne.

► Soit μ une moyenne ; notons φ la fonction qui, à x appartenant à A, associe $\mu(1,x)$.

Q6 Montrez que φ est continue en 1.

Q7 Établissez une relation simple entre $\varphi(x)$ et $\varphi(1/x)$.