Sup PCSI2 — Devoir 2004/03

► Pour $n \geqslant 2$, on note $f_n : x \geqslant 0 \mapsto x^n - nx - 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$.

► Cette solution sera désormais notée x_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $x_n > 1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que $x_n < 3$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez que $x_n < 2$ pour tout $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissez $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant n + 1$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire $x_n > 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Étudiez la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$, puis établissez la convergence de cette suite.

$\boxed{\text{Q8}}$ Déterminez $\ell = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

► Pour $n \geqslant 2$, notons $\varepsilon_n = x_n - 1$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.