Traitez au moins un problème (le 1 pour le groupe 1, le 2 pour le groupe 2). À rendre le jeudi 4 novembre 2004.

Problème 1

► Notons $f : x > 0 \mapsto \dfrac{x^2-1}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(x)$.

Q1 Étudiez les variations de f et construisez sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

Q2 Déterminez la place de $\mathcal{C}$ par rapport à la parabole Γ d'équation $y = \dfrac{1}{2}(x-1)^2$.

Q3 Calculez $I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ pour $x \in]0,1]$.

Q4 Calculez $\ell = \displaystyle\lim_{x\to 0^+} I(x)$. Quelle est la signification géométrique de ℓ ?

Q5 Calculez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Vous pourrez utiliser l'égalité $k^2 = \dfrac{(k+1)^3 - k^3 - 3k - 1}{3}$.

Q6 Simplifiez $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$. Vous ferez apparaître $n!$ et n^n.

Q7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissez l'encadrement $\displaystyle\int_{1/n}^1 f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \leqslant \frac{1}{n} f\Big(\frac{1}{n}\Big) + \int_{1/n}^1 f(t)\,dt$.

Q8 En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\Big(\frac{n^n}{n!}\Big) = 1$.

Problème 2

► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^n x^n e^{-x}\,dx$.

Q1 Calculez I_1 et I_2.

Q2 Aau moyen d'un changement de variable, établissez la formule $I_n = n^n e^{-n} \displaystyle\int_0^n e^t \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n dt$.

Q3 Pour $x \in [0,1[$, établissez l'inégalité $\ln(1-x) \leqslant -x - \dfrac{x^2}{2}$.

Q4 En déduire, pour $t \in [0,n]$, l'inégalité $e^t\Big(1-\dfrac{t}{n}\Big)^n \leqslant e^{-\frac{t^2}{2n}}$.

Q5 Établissez l'inégalité $\dfrac{e^n}{n^n} I_n \leqslant \sqrt{2n} \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u^2}\,du$.

Q6 Pour $u \geqslant 1$, établissez l'inégalité $e^{-u^2} \leqslant e^{-u}$.

Q7 En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n^{n+1}} I_n$.