Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (d'après ECRICOME 2003, option scientifique)

► Soit $a > 0$. Nous étudions la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels définie par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + (u_n)^2$.

Q1 Quel est le sens de variation de cette suite ?

Q2 Montrez que cette suite diverge vers $+\infty$.

► Notons $v_n = 2^{-n}\ln(u_n)$.

Q3 Prouvez que les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs APCR.

Q4 Montrez que $v_{n+1} - v_n = 2^{-n-1}\ln\Big(1 + \dfrac{1}{u_n}\Big)$.

Q5 En déduire que, quels que soient les naturels n et k :

$$0 < v_{n+k+1} - v_{n+k} \leqslant 2^{-n-k-1}\ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)$$

Q6 En déduire que, quels que soient les naturels n et p :

$$0 < v_{n+p+1} - v_n \leqslant 2^{-n}\ln\Big(1 + \frac{1}{u_n}\Big)$$

Q7 Montrez que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge. Sa limite sera notée α.

Q8 Montrez que $u_n \leqslant \exp(2^n\alpha)$.

Q9 ⋆⋆ Utilisez l'encadrement établi à la question 6 pour montrer que $\exp(2^n\alpha) \leqslant u_n + 1$.

► Notons $\beta_n = \exp(2^n\alpha) - u_n$.

Q10 Montrez que la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Q11 Quel équivalent simple de u_n en déduisez-vous ?

Q12 Établissez la relation $2\beta_n - 1 = \big(\beta_{n+1} + (\beta_n)^2 - \beta_n\big)\exp(-2^n\alpha)$.

Q13 Déduire de ce qui précède le développement asymptotique suivant :

$$u_n = \exp(2^n\alpha) - \frac{1}{2} + o(1)$$

Exercice 2 (d'après ESIGETEL 1995)

► Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; notons $\mathbf{T}_\alpha$ la fonction qui, à $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, associe $\mathbf{T}_\alpha(f)$ définie par $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x) = f(x-\alpha)$. Vous noterez soigneusement le rôle des parenthèses dans $\big(\mathbf{T}_\alpha(f)\big)(x)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ La notation $\mathbf{T}_\alpha\big(f(x)\big)$ a-t-elle un sens ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifiez : $\mathbf{T}_\alpha$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Que pouvez-vous dire de $\mathbf{T}_\alpha \circ \mathbf{T}_\beta$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Que pouvez-vous dire alors de la fonction $\alpha \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{T}_\alpha$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Justifiez : $\mathbf{T}_\alpha$ est un automorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

► Notons $\mathrm{p} : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x$, $\mathrm{q} : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}$, $\mathrm{r} : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^x$ et $\mathrm{s} : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{-x}$. $\mathcal{E}$ désigne le s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B} = (\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \mathrm{s})$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Exprimez $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{p})$, $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{q})$, $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{r})$ et $\mathbf{T}_\alpha(\mathrm{s})$ en fonction de p, q, r et s.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que $\mathcal{E}$ est stable par $\mathbf{T}_\alpha$.

► $\mathbf{T}_\alpha$ induit donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$, que nous noterons $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Justifiez : $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Explicitez la matrice M_α de $\widehat{\mathbf{T}_\alpha}$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice inverse de M_α.

► Notons $\mathbf{D}$ la fonction qui, à $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, associe $\mathbf{D}(f) = f'$. Il est clair que $\mathbf{D}$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q12}}$ $\mathbf{D}$ est-il injectif ?

$\boxed{\text{Q13}}$ $\mathbf{D}$ est-il surjectif ?

$\boxed{\text{Q14}}$ Exprimez $\mathbf{D}(\mathrm{p})$, $\mathbf{D}(\mathrm{q})$, $\mathbf{D}(\mathrm{r})$ et $\mathbf{D}(\mathrm{s})$ en fonction de p, q, r et s.

$\boxed{\text{Q15}}$ Montrez que $\mathcal{E}$ est stable par $\mathbf{D}$.

► $\mathbf{D}$ induit donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$, que nous noterons $\widehat{\mathbf{D}}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Explicitez la matrice Δ de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Justifiez : $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q18}}$ Calculez la matrice inverse de Δ.

$\boxed{\text{Q19}}$ Les automorphismes $\widehat{\mathbf{T}}$ et $\widehat{\mathbf{D}}$ commutent-ils ?

► Notons Eq_2 l'équation différentielle $y'' = y$ et Eq_4 l'équation différentielle $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$. Par « solution » de l'une de ces équations, nous entendons « solution sur $\mathbb{R}$ ».

$\boxed{\text{Q20}}$ Montrez que tout élément de $\mathcal{E}$ est solution de Eq_4.

$\boxed{\text{Q21}}$ Soit f une solution de Eq_4. De quelle équation $f'' - f$ est-elle solution ?

$\boxed{\text{Q22}}$ Décrivez (sans preuve) les solutions de Eq_2.

$\boxed{\text{Q23}}$ Décrivez (sans preuve) les solutions de l'équation différentielle $y'' - y = e^x$, puis celles de l'équation différentielle $y'' - y = e^{-x}$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Montrez que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des solutions de Eq_4.