Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice : algèbre linéaire

▶ Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Fixons $p \in [\![1, n-1]\!]$, et notons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\{e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n\}$.

Q1 Que pouvez-vous dire des deux s.e.v. F et G ?

▶ Pour $a \in E$, nous noterons $\mathrm{H}_a = \mathrm{Vect}\{e_1 + a, e_2 + a, \ldots, e_p + a\}$.

Q2 Montrez que, si a appartient à G, alors H_a et G sont supplémentaires.

▶ Fixons deux éléments a et b de G.

Q3 Montrez que, si $e_1 + b$ appartient à H_a, alors $a = b$.

Q4 En déduire une CNS portant sur a et b pour que $\mathrm{H}_a = \mathrm{H}_b$.

▶ Désormais, a et b sont deux éléments de G distincts.

Q5 Montrez que $\mathrm{H}_a \cap \mathrm{H}_b = \mathrm{H}_c$, où $c = -e_p$.

Q6 Déterminez la dimension de H_c.

Q7 Donnez un supplémentaire simple de H_c.

Problème : étude qualitative des solutions d'une équation différentielle

Préliminaires

Q1 Rappelez la *définition* de la fonction arctan. On ne vous demande pas ses propriétés.

Q2 Explicitez $\arctan'(x)$, preuve à l'appui.

Position du problème

▶ Notons $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $y' = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(y)$. Une *solution* sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{E}$ est une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $f'(t) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\big(f(t)\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Une *courbe intégrale* de $\mathcal{E}$ est la courbe représentative d'une solution sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{E}$.

▶ Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$; nous dirons que cette solution vérifie la condition initiale (t_0, y_0) si $f(t_0) = y_0$. Nous admettrons que $\mathcal{E}$ possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale (t_0, y_0) ; ceci revient à dire que, par chaque point du plan, il passe une et une seule courbe intégrale de $\mathcal{E}$.

▶ Dans la suite, f désigne une solution sur $\mathbb{R}$ de $\mathcal{E}$.

Quelques questions faciles

Q3 Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q4 Montrez que f est strictement croissante.

Q5 Montrez que $-f$ est convexe.

Q6 Montrez que f est lipschitzienne.

Comportement de f au voisinage de $+\infty$

► Nous nous intéressons dans un premier temps au comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Nous allons montrer que f n'est pas majorée. Pour ce faire, nous allons raisonner par l'absurde ; nous supposons donc que f est majorée par un réel M.

Q7 Prouvez l'existence d'un réel $k > 0$ tel que $f'(t) \geqslant k$ pour tout réel t.

Q8 En déduire $f(t) \geqslant f(0) + kt$ pour tout $t \geqslant 0$.

Q9 Mettez en évidence une contradiction.

Q10 Finalement, quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Q11 Et quelle est la limite de $f'(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

► Nous allons montrer que $f(t)$ est négligeable devant t lorsque t tend vers $+\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$.

Q12 Justifiez l'existence d'un réel t_ε tel que $0 < f'(t) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \geqslant t_\varepsilon$.

Q13 Justifiez l'existence d'un réel τ_ε tel que $\left|\dfrac{f(t_\varepsilon)}{t}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour tout $t \geqslant \tau_\varepsilon$.

Q14 En partant de l'égalité $f(t) = f(t_\varepsilon) + \displaystyle\int_{t_\varepsilon}^{t} f'(u)\,du$, justifiez l'existence d'un réel T_ε tel que $\left|\dfrac{f(t)}{t}\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \geqslant T_\varepsilon$.

Q15 Concluez !

Comportement de f au voisinage de $-\infty$

► Nous nous intéressons maintenant au comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

Q16 Pour $t \leqslant 0$, justifiez l'inégalité $f(t) \leqslant f(0) + tf'(0)$.

Q17 En déduire que $f(t)$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers $-\infty$.

Q18 Quelle est la limite de $f('t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?

Q19 $\star\star$ En vous inspirant de l'étude du comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, montrez que $f(t)$ est équivalent à πt lorsque t tend vers $-\infty$.

Synthèse

Q20 Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Q21 Quelle est la plus petite constante de Lipschitz acceptable pour f ?

► Notons s la solution de $\mathcal{E}$ vérifiant la condition initiale $(0, 2)$.

Q22 Explicitez le $DL_2(0)$ de s.

Q23 Donnez l'allure de la courbe représentative de s.

► Soient t_0, t_1 et y_0 trois réels. Notons g la solution de $\mathcal{E}$ vérifiant la condition initiale (t_0, y_0)

Q24 Montrez que la fonction $h : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t - t_1 + t_0)$ est solution de $\mathcal{E}$, et qu'elle vérifie la condition initiale (t_1, y_0).

Q25 En déduire que deux courbes intégrales de $\mathcal{E}$ sont images l'une de l'autre par une translation.