Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : oral ENSTIM 2003, PCSI

▶ Nous étudions la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,dx$.

Q1 Prouvez l'encadrement $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Q2 Que pouvez-vous en déduire au sujet de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q3 Au moyen d'une intégration par parties entièrement justifiée, établissez pour $n \geqslant 1$ la formule suivante :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$$

Q4 Pour $u \geqslant 0$, quel est le signe de $\ln(1+u) - u$?

Q5 En déduire un encadrement de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx$.

Q6 En déduire un équivalent *simple* de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 : oral ENSTIM 2003, MPSI

Q1 Rappelez la définition de la fonction arcsin.

▶ Notons $f : x \mapsto \arcsin\big(\exp(-x^2)\big)$.

Q2 Quel est l'ensemble de définition de f ?

Q3 Sur quel(s) intervalle(s) étudierez-vous f ?

Q4 Quelle est la limite de f en $+\infty$?

Q5 Quel est le signe de $f(x)$?

Q6 Sans expliciter $f'(x)$, déterminez le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

Q7 Montrez que f est dérivable sauf peut-être en 0.

Q8 Explicitez $f'(x)$ pour $x \neq 0$

Q9 f est-elle dérivable à droite de 0 ? Si oui, quelle est la valeur de $f'_d(0)$?

Q10 f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ entier ?

Q11 Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k!}$; nous savons que $e = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez la majoration $S_n < e$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Pour $p \geqslant 2$, justifiez la majoration $S_p + \frac{1}{p} \geqslant e$.

► Nous étudions la fonction f qui, au réel x, associe $f(x) = e^x + x$.

$\boxed{\text{Q3}}$ A-t-on $f(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(x)$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Justifiez *rapidement* l'affirmation suivante : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

► L'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution réelle, que nous noterons ξ.

$\boxed{\text{Q5}}$ En utilisant les résultats des questions 1 et 2, donnez un encadrement de ξ.

► Nous noterons $\lceil x \rceil$ la « partie entière supérieure » du réel x, c'est-à-dire le plus petit relatif supérieur ou égal à x ; nous avons donc $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ et $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

► Pris d'un accès de générosité aussi subit qu'inattendu, le correcteur décide d'accorder une prime pour récompenser les étudiants qui auront obtenu un encadrement « serré » de ξ. Pour ce faire, il applique la formule $= \left\lceil -\frac{\ln(M-m)}{\ln(2)} \right\rceil$ dans laquelle m (resp. M) est le minorant (resp. le majorant) de ξ.

$\boxed{\text{Q6}}$ La prime peut-elle être strictement négative ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que la prime est d'autant plus grande que l'amplitude de l'intervalle $[m, M]$ est petite.

$\boxed{\text{Q8}}$ Avec cette formule, quelle serait votre prime ?

► Nous nous intéressons maintenant à la bijection réciproque de f, que nous noterons g. Nous avons donc $y = g(x)$ ssi $x = f(y)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Donnez un équivalent *simple* de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

$\boxed{\text{Q11}}$ A-t-on $g(x+1) \underset{x \to -\infty}{\sim} g(x)$?

$\boxed{\text{Q12}}$ Justifiez l'affirmation suivante : lorsque x tend vers $+\infty$, $g(x)$ est équivalent à $\ln(x)$.

$\boxed{\text{Q13}}$ A-t-on $g(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$?

$\boxed{\text{Q14}}$ $\star\star$ Donnez un équivalent *simple* de $g(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Rappelez l'expression de $(f^{-1})'$; en déduire l'expression de g' en fonction de f' et g, puis celle de g'' en fonction de f', f'' et g.

$\boxed{\text{Q16}}$ $\star$ Explicitez le $DL_2(1)$ de g.