Sup PCSI2 — Contrôle 2003/05

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : fonctions polynômes et continuité

Q1 • Question de cours : soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Rappelez la définition de $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Q2 • Question de cours : énoncez le théorème des valeurs intermédiaires.

Q3 • Question de cours : quand dit-on qu'une fonction $q : E \mapsto F$ est injective ?.

Q4 • Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit ψ une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. ψ possède-t-elle nécessairement une borne inférieure ?

► Notons $p : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 + x^3 + \lfloor x \rfloor$.

Q5 p est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Q6 p est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Q7 Montrez que p est strictement croissante.

Q8 Résolvez l'équation $p(x) = 131$.

Q9 p est-elle surjective ?

► Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynôme de degré n impair. Pour fixer les idées, nous supposons que le coefficient dominant k de f est positif.

Q10 Que pouvez-vous dire des limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Q11 Montrez que f est surjective.

Q12 Donnez un exemple montrant que f n'est pas nécessairement injective.

► Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction polynôme non constante, de degré n pair. Pour fixer les idées, nous supposons que le coefficient dominant k de g est positif.

Q13 Que pouvez-vous dire des limites de g en $+\infty$ et $-\infty$?

Q14 Justifiez l'affirmation suivante : il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que $|x| \geqslant A$ implique $g(x) \geqslant 0$.

Q15 Montrez que g n'est pas injective.

Q16 Montrez que g possède une borne inférieure m, et que cette borne est atteinte.

Q17 g est-elle surjective ?

Q18 Décrivez $g(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : groupes

► Les groupes considérés dans cet exercice sont notés multiplicativement. Le neutre de chaque groupe est noté e ; l'inverse de a est noté a^{-1}.

$\boxed{\text{Q1}}$ Question de cours : rappelez la définition d'un groupe.

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez deux exemples de groupes non commutatifs ; vous n'avez pas besoin de vérifier les axiomes de la structure de groupe, mais vous devrez exhiber dans chaque cas deux éléments qui ne commutent pas.

$\boxed{\text{Q3}}$ Un élément x fixé d'un groupe G vérifie la propriété suivante : $xyxy = yxyx$ pour tout élément y de G. Montrez que $xyx^{n+1}y = yx^{n+1}yx$ pour tout élément y de G et tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit H un groupe vérifiant la propriété suivante : $txyt = xt^2y$ quels que soient x, y et t appartenant à H. Le groupe H est-il nécessairement commutatif ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Deux éléments u et v d'un groupe K vérifient $uv^2u = vu^2v$. Ces éléments commutent-ils nécessairement ?

Exercice 3 : autour des fonctions lipschitziennes

► Ne pas respecter l'orthographe du mot **lipschitzien** sera sévèrement sanctionné.

► Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $k \geqslant 0$. Nous dirons que f est k-lipschitzienne sur I si $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ quels que soient x et y appartenant à I. Pour abréger la rédaction, nous dirons alors que $k \geqslant 0$ est une constante de Lipschitz acceptable pour f sur I.

► Nous dirons que f est lipschitzienne sur I s'il existe $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne sur I.

Questionnaire rapide

► Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si f est lipschitzienne, alors f est continue.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si f est continue, alors f est lipschitzienne.

$\boxed{\text{Q3}}$ Si f est lipschitzienne, alors f est dérivable.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si f est dérivable, alors f est lipschitzienne.

Questions classiques

$\boxed{\text{Q5}}$ Prouvez que, si f est lipschitzienne sur I, alors $|f|$ l'est aussi.

$\boxed{\text{Q6}}$ Que pensez-vous de la réciproque ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouver que la somme de deux fonctions f et g lipschitziennes sur I est elle-même lipschitzienne sur I.

$\boxed{\text{Q8}}$ En est-il de même pour le produit de deux fonctions lipschitziennes sur I ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Prouvez que, si I est borné, et si f est lipschitzienne sur I, alors f est bornée.

$\boxed{\text{Q10}}$ En déduire que, si I est borné, et si f et g sont deux fonctions lipschitziennes sur I, alors leur produit fg est lui aussi une fonction lipschitzienne sur I.

$\boxed{\text{Q11}}$ Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f lipschitzienne sur I, et g lipschitzienne sur J. Supposons $f(I) \subset J$, ainsi $g \circ f$ est définie. Que pouvez-vous dire de cette composée ?

$\boxed{\text{Q12}}$ Notons $\mathcal{J} =]0, \pi]$ et $\varphi : x \in \mathcal{J} \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction φ est-elle lipschitzienne sur l'intervalle $\mathcal{J}$?

$\boxed{\text{Q13}}$ Soit $a > 0$. Montrez que $f : x \in [a, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que $f : x \in [0, +\infty[\mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

$\boxed{\text{Q15}}$ Soit $f \in \mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. Supposons que f ne s'annule pas. Montrez qu'il existe $m > 0$ tel que $\big|f(x)\big| \geqslant m$ pour tout $x \in [a, b]$.

$\boxed{\text{Q16}}$ En déduire que, si f est lipschitzienne sur $[a, b]$ et ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est également lipschitzienne sur $[a, b]$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Prouvez que, si f est lipschitzienne sur $[a, b]$ et strictement positive, alors la fonction $t \in [a, b] \mapsto \sqrt{f(x)}$, que nous noterons $\sqrt{f}$, est également lipschitzienne sur $[a, b]$.

Fonctions localement lipschitziennes

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Nous dirons que f est *localement* lipschitzienne si, pour tout $x \in I$, il existe $\alpha > 0$ tel que la restriction de f à $I \cap]x-\alpha, x+\alpha[$ soit lipschitzienne. Vous noterez bien que α dépend de x.
- Il est clair que toute fonction lipschitzienne est localement lipschitzienne.
- Soit I un intervalle fermé et borné : $I = [a, b]$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Nous allons prouver que, si f est localement lipschitzienne sur I, alors f est lipschitzienne sur I. On note E l'ensemble des éléments c de $[a, b]$ tels que f soit lipschitzienne sur $[a, c]$

$\boxed{\text{Q18}}$ Prouvez que E est non vide et possède une borne supérieure, que nous noterons m.

$\boxed{\text{Q19}}$ Prouvez que $m \in E$, et que $m = b$. Concluez.

$\boxed{\text{Q20}}$ Donnez un exemple de couple (I, f) tel que f soit localement lipschitzienne sur I, sans être lipschitzienne sur I.