Sup PCSI2 — Contrôle 2003/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : questions diverses

Q1 Soient $k \geqslant 2$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^k$. Notons $g = (f \circ f)'$ et $h = f' \circ f'$. Explicitez $g(x)$ et $h(x)$. Conclusion ?

Q2 La fonction $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifie $\varphi(x+1) > \varphi(x)$ pour tout réel x. Cette fonction φ est-elle croissante ?

Q3 Calculez la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}}$.

Q4 Calculez la limite de la suite de terme général $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(2n+k)}}$.

Q5 Calculez la limite ℓ de la suite de terme général $W_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{ke^{k/2n}}{n(n+3)}$.

Q6 Résolvez (dans $\mathbb{R}$) l'équation $\arctan(x) + \arctan(3x) = \pi/2$.

Exercice 2 : calcul des puissances successives d'une matrice carrée

- Nous désirons obtenir une expression simple de A^n, où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$, nous noterons $(A^n)_{i,j}$ le coefficient situé ligne i et colonne j dans la matrice A^n.

Q1 Sans aucun calcul, que pouvez-vous affirmer concernant la matrice A^n ?

Q2 Calculez A^2, A^3 et A^4.

Q3 Donnez (preuves à l'appui) les expressions de $\alpha_n = (A^n)_{1,1}$, $\beta_n = (A^n)_{2,2}$ et $\gamma_n = (A^n)_{3,3}$.

- Notons $x_n = (A^n)_{1,2}$.

Q4 Exprimez x_{n+1} en fonction de x_n.

Q5 En déduire une expression simple de x_n.

Q6 Donnez de même une expression simple de $y_n = (A^n)_{2,3}$.

Q7 Au vu des matrices calculées à la question 2, quelle formule peut-on deviner pour $z_n = (A^n)_{1,3}$?

Q8 Démontrez cette formule !

Q9 Finalement, donnez l'expression de A^n en fonction de n.

Q10 Justifiez rapidement l'affirmation suivante : la matrice A^n est inversible.

Q11 Remplaçons n par $(-n)$ dans l'expression établie à la question 9 : nous obtenons une matrice B_n. Cette matrice est-elle l'inverse de A^n ?

Problème : nombres harmoniques et constante d'Euler

Partie 1

► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$ et $r_n = H_n - \ln n$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour $k \geqslant 2$, établissez $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ En déduire $\ln n \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que la suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$ converge ; nous noterons γ sa limite.

► Pour $k \geqslant 2$, notons $v_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t^2}\, dt$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Justifiez l'encadrement $0 \leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que la suite de terme général $V_n = \sum_{2 \leqslant k \leqslant n} v_k$ converge.

$\boxed{\text{Q7}}$ Pour $n \geqslant 1$, justifiez : $\lim_{p \to \infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{p} v_k \Big) = r_n - \gamma$.

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire $0 \leqslant r_n - \gamma \leqslant \frac{1}{n}$.

Partie 2

► L'encadrement qui conclut la première partie montre que la convergence vers γ de la suite de terme général r_n est trop lente ; nous nous proposons donc d'accélérer cette convergence.

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $k \geqslant 2$, notons $I_k = \int_0^1 \frac{x(1-x)(1-2x)}{(x+k-1)^4}\, dx$. Au moyen d'intégrations par parties répétées (et dûment justifiées), établissez :

$$I_k = 2v_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big)$$

$\boxed{\text{Q10}}$ Toujours pour $k \geqslant 2$, notons $J_k = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5}\, dx$. Justifiez :

$$J_k = v_k + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\Big) + \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big)$$

$\boxed{\text{Q11}}$ Quel est le maximum de la fonction $x \in [0,1] \mapsto x(1-x)$?

$\boxed{\text{Q12}}$ Toujours pour $k \geqslant 2$, établissez : $0 \leqslant J_k \leqslant \frac{1}{64}\Big(\frac{1}{(k-1)^4} - \frac{1}{k^4}\Big)$.

$\boxed{\text{Q13}}$ En déduire, pour $n \geqslant 1 : 0 \leqslant r_n - \gamma - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} \leqslant \frac{1}{64n^4}$

$\boxed{\text{Q14}}$ Quel développement asymptotique de H_n pouvez-vous en tirer ?