► Rappels : pour $0 \leqslant p \leqslant n$, nous notons $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Pour i et j relatifs, nous notons $\delta_{i,j}$ le réel égal à 1 si $i = j$, à 0 dans le cas contraire.

Q1 Pour $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$, donnez une autre écriture du produit $\binom{n}{q}\binom{q}{p}$, faisant intervenir deux coefficients binomiaux.

► $\mathbf{F}$ désigne le $\mathbb{R}$-e.v. des suites de réels. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathbf{F}$; définissons la suite $\mathcal{B}(v)$ par :

$$\big(\mathcal{B}(v)\big)_n = \sum_{0\leqslant p\leqslant n} (-1)^p \binom{n}{p} v_p \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Vous noterez bien que $\mathcal{B}$ associe, à une suite de réels, une autre suite de réels.

Q2 Si v est une suite de réels, la notation $\mathcal{B}(v_n)$ a-t-elle un sens ?

Q3 Montrez que la fonction $\mathcal{B}$ est un endomorphisme de $\mathbf{F}$.

► Dans les cinq questions suivantes, l'expression « expliciter $\mathcal{B}(v)$ » signifie « donner l'expression, en fonction de n, du terme général $\big(\mathcal{B}(v)\big)_n$ de la suite $\mathcal{B}(v)$ ». Il va de soi que cette expression devra être *la plus simple possible*.

Q4 Explicitez $\mathcal{B}(v)$ lorsque v est la suite définie par $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q5 Explicitez $\mathcal{B}(v)$ lorsque v est la suite définie par $v_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q6 Explicitez $\mathcal{B}(v)$ lorsque v est la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q7 Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$. Explicitez $\mathcal{B}(v)$ lorsque v est la suite définie par $v_n = \alpha^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q8 Fixons $q \in \mathbb{N}$. Explicitez $\mathcal{B}(v)$ lorsque v est la suite définie par $v_n = \binom{n}{q}$ pour tout $n \geqslant q$, et $v_n = 0$ pour tout $n < q$.

Q9 Justifiez la relation $\mathcal{B} \circ \mathcal{B} = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}}$.

Q10 Exhibez un élément v de $\mathbf{F}$, autre que la suite nulle, vérifiant $\mathcal{B}(v) = -v$.