► On rappelle qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ telle que, si a et b sont dans $\mathcal{I}$, avec $a < b$, alors $[a, b]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{I}$.

Partie 1

► Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point) et $f \in \mathcal{C}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$. Soient a, b, c et d quatre éléments de $\mathcal{I}$ tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$, $c < d$ et $f(c) > f(d)$. Définissons $\varphi : \ t \mapsto f\big((1-t)a + tc\big) - f\big((1-t)b + td\big)$.

Q1 Montrez que l'intervalle $[0, 1]$ est contenu dans l'ensemble de définition de φ.

Q2 Montrez que φ est continue sur $[0, 1]$.

Q3 Déterminez le signe de $\varphi(0)$ et celui de $\varphi(1)$.

Q4 En déduire l'existence de $\xi \in \,]0, 1[$ tel que $\varphi(\xi) = 0$.

Q5 f est-elle injective ?

Q6 Utilisez ce qui précède pour montrer que si une fonction f, définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$, est continue et injective, alors elle est strictement monotone.

Partie 2

► Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $|f(y) - f(x)| \geqslant |y - x|$ quels que soient les réels x et y. Nous noterons g la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Q7 Montrez que f est strictement monotone.

Q8 Montrez que $\lim\limits_{-\infty} |f| = \lim\limits_{+\infty} |f| = +\infty$ puis déterminez $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

Q9 En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même.

Q10 Que pouvez-vous dire de f^{-1} ?

Partie 3

► Dans cette partie, nous supposons qu'il existe des réels a et b tels que $a < b$ et $f\big([a, b]\big) \subset [a, b]$.

► Pour les deux questions suivantes, nous supposons f croissante.

Q11 Montrez que g est croissante et que $g(a) = g(b) = 0$.

Q12 En déduire que $f(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

Q13 Supposons maintenant f décroissante. En utilisant l'application $h : \ x \mapsto a + b - f(x)$, déterminez la restriction de f à $[a, b]$.