Sup PCSI2 — Devoir 2003/02

► On note $\varphi : x \in]0, e[\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$. En particulier, on a $\varphi(x_p) = -\dfrac{1}{p}$. On note $H_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{1}{k}$, et $H_0 = 0$ par convention.

Q1 Montrez que φ est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q2 Explicitez $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

Q3 Formulez une hypothèse plausible concernant $\varphi^{(n)}(x)$; Explicitez $\varphi^{(n)}(x)$ au moyen de H_n ; vous terminerez avec un raisonnement par récurrence.

Q4 Retrouvez l'expression précédente de $\varphi^{(n)}(x)$ avec la formule de Leibniz, en écrivant $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} \ln x$.