

Conditions à remplir impérativement : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s) ; n'utilisez ni encre rouge, ni crayon, ni tippex ; numérotez les copies de 1/n à n/n ; indiquez votre nom sur chaque copie ; numérotez les questions ; résolvez les questions dans l'ordre de l'énoncé ; sautez au moins une ligne entre deux questions consécutives.

Je ne me sentirai pas obligé de regarder les copies qui ne suivront pas ces recommandations. Qu'on se le dise !

Partie 1

- Q1 Donnez (sans justification) le $DL_5(0)$ de la fonction \arctan .
- Q2 Donnez (sans justification) le $DL_5(0)$ de la fonction $t > 0 \mapsto \ln(1+t)$.
- Q3 Soit $x > 0$. Énoncez et démontrez une relation simple entre $\arctan(x)$ et $\arctan(1/x)$.
- Q4 Soit $x > 0$. Au moyen d'une IPP soigneusement justifiée, calculez $\int_1^x \ln(t) dt$.
- Q5 Soit $x \in \mathbb{R}$. Au moyen d'une IPP soigneusement justifiée, calculez $\int_0^x \arctan(t) dt$.
- Q6 Soit $x \in \mathbb{R}$. Au moyen d'une IPP soigneusement justifiée, calculez $\int_0^x \ln(1+t^2) dt$.

Partie 2

► Notons $f : x \mapsto \frac{5}{9} \ln\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{2}{9} \ln\left(\frac{x^2+9}{18}\right) - 2 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{\pi}{2}$.

- Q7 Rédigez en Maple une fonction de nom **f** qui évalue $f(x)$ pour x donné.
- Q8 Déterminez l'ensemble de définition \mathcal{I} de f .
- Q9 Justifiez l'affirmation suivante : f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{I} .
- Q10 Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ ?
- Q11 Exhibez une solution *simple* de l'équation $f(x) = 0$.
- Q12 ★★ Donnez un équivalent *simple* de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Q13 Explicitez $f'(x)$ pour $x \in \mathcal{I}$. Vous présenterez le résultat sous forme d'une fraction rationnelle en x .
- Q14 Donnez le $DL_1(3)$ de f .
- Q15 Dressez le tableau des variations de f .
- Une *bonne expression* est une combinaison linéaire, à coefficients dans \mathbb{Q} , de nombres de l'une des formes suivantes : 1 ; π ; $\ln(n)$ avec n naturel au moins égal à 2 ; $\arctan(p/q)$ avec $p/q \in \mathbb{Q}$ irréductible. Par exemple, $A = 0$, $B = \frac{5\pi}{3} + 2 \arctan(7) - 3 \ln(8)$ et $C = \arctan(22/7) - \frac{179}{666} + \frac{\ln(13)}{12}$ sont de bonnes expressions.
- Q16 Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des bonnes expressions ?
- Une bonne expression est *canonique* si elle contient au plus un \arctan , et si chaque \ln est appliqué à un nombre premier. Ainsi, B n'est pas canonique alors que A et C le sont.
- Q17 ★★★ Montre que toute bonne expression est égale à une bonne expression canonique.
- Q18 f présente un maximum local, atteint en un certain réel x_1 . Donnez une bonne expression de $f(x_1)$.
- Q19 Donnez de même une bonne expression de $f(x_2)$, où x_2 est le point en lequel f présente un minimum local.
- Q20 Donnez l'allure de la courbe représentative de f .
- Q21 Combien l'équation $f(x) = 0$ possède-t-elle de solutions ? Vous justifierez soigneusement votre réponse.

Tournez S.V.P.

Partie 3

► Notons $g : x \in \mathcal{I} \mapsto f(x) - \ln(x)$.

Q22 Déterminez la limite λ de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q23 Explicitez $f''(x)$ pour $x \in \mathcal{I}$.

► Notons $q : x \in \mathbb{R} \mapsto x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 45$.

Q24 Explicitez puis factorisez $q'(x)$. Vous ferez intervenir deux réels qui s'expriment en fonction de $\sqrt{69}$; vous noterez ξ_1 le plus petit et ξ_2 le plus grand.

Q25 Dressez le tableau des variations de q .

Q26 Montrez que l'équation $q(x) = 0$ possède deux solutions. La plus petite sera notée α , l'autre sera notée β .

Q27 Donnez un encadrement de α par deux naturels consécutifs.

Q28 Justifiez l'encadrement $11 < \beta < 12$.

► Notons h la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $h(x) = g(1/x) - \lambda$ pour $x > 0$, et $h(0) = 0$.

Q29 Expliquez pourquoi cette fonction est continue à droite de 0.

Q30 Déterminez le $DL_3(0)$ de cette fonction.

Partie 4

Q31 Justifiez rapidement l'existence de la fonction $F : x > 0 \mapsto \int_3^x (g(t) - \lambda) dt$.

Q32 Quelle est la classe de F ?

► Nous admettrons le résultat suivant :

$$F(x) = \frac{2x \ln(x^2 + 9)}{9} - \frac{4x \ln(x)}{9} + \pi x - 2x \arctan(x/3) + 3 \ln(x^2 + 9) \\ + \frac{4 \arctan(x/3)}{3} - 6 \ln(3) - \frac{11 \ln(2)}{3} - \frac{11\pi}{6}$$

Q33 Donnez un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.