Sup PCSI2 — Contrôle 2002/09

Conditions à remplir impérativement : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s) ; n'utilisez ni encre rouge, ni crayon, ni tippex ; numérotez les copies de $1/n$ à n/n ; indiquez votre nom sur chaque copie ; numérotez les questions ; résolvez les questions dans l'ordre de l'énoncé ; sautez au moins une ligne entre deux questions consécutives.

Je ne me sentirai pas obligé de regarder les copies qui ne suivront pas ces recommandations. Qu'on se le dise !

Exercice 1

► Nous nous intéressons à l'équation différentielle $y' = \sqrt{1+y^4}$, que nous noterons $\mathcal{E}$.

► Soit $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{I}$ est une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ vérifiant $f'(t) = \sqrt{1+f^4(t)}$ pour tout $t \in \mathcal{I}$.

► Un conseil : n'essayez pas de résoudre cette équation différentielle…

Q1 L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{I}$ est-il un s.e.v. de $\mathcal{D}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$?

Q2 Soit f une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{I}$. Quel est le sens de variation de f ?

► Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Nous noterons $\mathcal{I}_a = \{t+a \mid t \in \mathcal{I}\}$.

Q3 Soit f une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{I}$; montrez que $g :\ t \in \mathcal{I}_a \mapsto f(t-a)$ est une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{I}_a$.

Q4 Décrivez une transformation géométrique simple $\mathcal{T}$ telle que l'image par $\mathcal{T}$ de la courbe représentative de f soit la courbe représentative de g.

Q5 Soit $a > 0$; notons $\mathcal{I} = [0, a[$ et $\mathcal{J} =]-a, 0]$. Soit f une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{I}$. Montrez que la fonction $h :\ t \in \mathcal{J} \mapsto -f(-t)$ est une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{J}$.

► Nous allons maintenant exhiber des solutions de $\mathcal{E}$.

Q6 Justifiez l'existence de la fonction $F :\ x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$. Un conseil : n'essayez pas de calculer cette intégrale…

Q7 Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q8 F possède-t-elle une parité ?

Q9 Quel est le sens de variation de F ?

Q10 F est-elle lipschitzienne ?

Q11 Montrez que F est majorée par 1.

Q12 Montrez que $F(x)$ possède une limite M lorsque x tend vers $+\infty$.

Q13 Comparez M et 1.

Q14 Cette limite M est-elle atteinte par F ?

Q15 Justifiez l'inégalité $\dfrac{\pi}{4} \leqslant M$.

Q16 Montrez *rapidement* que $F(x)$ possède une limite m lorsque x tend vers $-\infty$.

Q17 Montrez que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que vous préciserez.

Q18 Montrez que F^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q19 Montrez que F^{-1} est une solution de $\mathcal{E}$ sur $]m, M[$.

Q20 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Prouvez l'existence de $h > 0$ tel que l'équation $\mathcal{E}$ possède sur l'intervalle $]t_0-h, t_0+h[$ une solution f vérifiant $f(t_0) = 0$.

Tournez S.V.P.

Exercice 2

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la définition d'un produit scalaire φ sur un $\mathbb{R}$-e.v. E.

$\boxed{\text{Q2}}$ Rappelez la définition d'un espace euclidien.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soient (E, φ) un espace euclidien et $\mathcal{B}$ une base de E. Rappelez la définition de la matrice de φ dans $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'amplitude non nulle et $f \in \mathcal{D}^2(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ telle que f'' soit la fonction nulle. Que pouvez-vous dire de f ?

► Notons $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$. Définissons :

$$\varphi : (f,g) \in \mathrm{E}^2 \mapsto f(-1) \times g(-1) + f(1) \times g(1) + \int_{-1}^{1} f''(t) g''(t)\, dt$$

Remarque (pas forcément inutile) : dans cette définition, $\times$ désigne la multiplication de deux réels.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que φ est un produit scalaire sur E.

► Soit $f \in \mathrm{E}$; nous noterons $\|f\|$ la norme de f, définie par $\|f\| = \sqrt{\varphi(f,f)}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Que pouvez-vous dire de $\varphi(f,g)$ si f est paire et g impaire ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Notons $\omega : t \in [-1,1] \mapsto -t$ et $\Phi : f \in \mathrm{E} \mapsto f \circ \omega$. Montrez que Φ est un endomorphisme orthogonal de E.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $f_n : t \in [-1,1] \mapsto t^n$. Calculez $\|f_n\|$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Énoncez et démontrez la formule permettant de transformer le produit $\sin(a)\sin(b)$ en une somme.

► Pour $j \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $h_j : t \in [-1,1] \mapsto \sin(2j\pi t)$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Calculez $\varphi(h_j, h_k)$ pour j et k naturels non nuls. Vous distinguerez deux cas de figure selon que j et k sont égaux ou non.

► Notons $\mathrm{F} = \mathbb{R}_3[X]$; en identifiant polynômes et fonctions polynômes, F est un s.e.v. de E. Muni du produit scalaire induit par φ, F est un espace euclidien. Notons $\mathcal{B} = (\mathbf{1}, X, X^2, X^3)$ la base canonique de F.

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice $\mathbf{M}$ de φ dans $\mathcal{B}$; compte tenu du contexte, vous indexerez ses lignes et ses colonnes à partir de 0. Indication : la somme des coefficients de M est égale à 48.

► Notons $\mathcal{P}$ le plan engendré par $\mathbf{1}$ et X (c'est-à-dire par les fonctions $t \in [-1,1] \mapsto 1$ et $t \in [-1,1] \mapsto t$) et Π la projection orthogonale de E sur $\mathcal{P}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Soient $q : t \in [-1,1] \mapsto \cos(\pi t)$ et $r = \Pi(q)$. Explicitez $r(t)$, pour $t \in [-1,1]$.