Sup PCSI2 — Contrôle 2002/07

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

## Problème 1 : de l'algèbre, oui, mais linéaire !

► On note $E$ le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $f : t \mapsto e^t$, $g : t \mapsto e^{2t}$ et $h : t \mapsto e^{t^2} = \exp(t^2)$.

Q1 Justifiez rapidement le fait que $\mathcal{B} = (f, g, h)$ est une base de $E$ ; vous donnerez au moins deux méthodes différentes.

Q2 Soit $p \in E$ ; calculez les coordonnées $(a, b, c)$ de $p$ dans $\mathcal{B}$ en fonction de $p(0)$, $p'(0)$ et $p''(0)$.

► Soit $\varphi$ l'application qui, à $p \in E$, associe $Af + Bg + Ch$, où : $\begin{cases} A = \frac{1}{4}\big(-4p(0) + 2p'(0) - 2p''(0)\big) \\ B = \frac{1}{4}\big(2p(0) + p'(0) + p''(0)\big) \\ C = \frac{1}{4}\big(-2p(0) - 3p'(0) + p''(0)\big) \end{cases}$

Q3 Déterminez la matrice $M$ de $\varphi$ dans la base $(f, g, h)$ de $E$.

Q4 Calculez $M^2$.

Q5 Au vu de $M$ et de $M^2$, que pouvez-vous dire de l'endomorphisme $\varphi$ ?

## Problème 2 : des calculs pour tous les goûts

Q1 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin^{666}(x) = 666\cos^{666}(x)$.

Q2 Calculez la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sqrt{\frac{k^2+1}{n^4+1}}$. Vous noterez bien que $S_n$ n'est pas une somme de RIEMANN. Vous noterez également que le nom de ce dernier s'écrit avec deux $\boxed{\mathbf{n}}$.

Q3 Calculez $I = \int_0^\pi \sin^{666}(t)\cos^{2003}(t)\,dt$.

Q4 Calculez la limite de la suite de terme général $Z_n = \frac{1}{n^3} \sum_{1\leqslant k\leqslant n^2} \lfloor k/n \rfloor$.

Q5 Notons $z = \frac{1-i}{i+\sqrt{3}} \exp\Big(\frac{i\pi}{13}\Big)$. Mettez $Z = z^{2002}$ sous forme algébrique.

**Tournez S.V.P.**

## Problème 3 : de l'analyse, d'après une épreuve du concours EPF

*Les réponses qui ne sont pas rigoureusement justifiées ne seront pas prises en compte dans la notation.*

► Notons $f : x \mapsto \ln\big(x + \sqrt{1+x^2}\big)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez l'ensemble de définition $\mathcal{J}$ de $f$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quelle est la parité de $f$ ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que $f$ est continue sur $\mathcal{J}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $f$ est dérivable sur $\mathcal{J}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Explicitez $f'(x)$, pour $x \in \mathcal{J}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{J}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Déterminez des réels $a$ et $b$ tels que $f(x) = \ln(ax) + bx^{-2} + o(x^{-2})$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de $f$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Calculez $u_0$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez que cette suite converge.

$\boxed{\text{Q12}}$ Avec une majoration très simple de $u_n$, déterminez la limite $\ell$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Justifiez l'inégalité $u_n \geqslant \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Écrivez une relation *très simple* entre $u_n$, $u_{n+2}$ et $I_n$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*, exprimez $I_n$ en fonction de $u_{n+2}$. Vous noterez que je considérerai comme une offense grave l'absence, sur votre copie, du $\boxed{\text{s}}$ final dans l'expression *intégration par parties*.

$\boxed{\text{Q16}}$ En déduire une relation entre $u_n$ et $u_{n+2}$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Utilisez cette relation pour établir la majoration $(2n+3)u_{n+2} \leqslant \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Q18}}$ En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers l'infini.