Sup PCSI2 — Contrôle 2002/05

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

▶ Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie (preuve à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites de réels. On suppose (a_n) et (c_n) croissantes, et $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ pour tout n. Alors la suite (b_n) est croissante.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si une suite (u_n) diverge et n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q3}}$ $\star\star$ f est une fonction polynôme. On suppose qu'elle est strictement croissante, et que $f(0) = 0$. Alors la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

Exercice 2

▶ Dans chacune des questions suivantes, « expliciter une bijection f de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{J}$ » consiste à :

- décrire $f : \mathcal{I} \mapsto \mathcal{J}$, au moyen d'une ou plusieurs formules exprimant $f(x)$ en fonction de x ;
- prouver que f est une bijection de $\mathcal{I}$ sur $\mathcal{J}$;
- et, pour emporter la conviction du lecteur, tracer la courbe représentative de f.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. Explicitez une bijection φ de $[0, 1]$ sur $[a, b]$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez une bijection ψ de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Explicitez une bijection η de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Existe-t-il une bijection continue de $[0, 1]$ sur $[0, +\infty[$?

$\boxed{\text{Q5}}$ $\star\star$ Montrez que la fonction ξ définie par $\xi(0) = 0$ et $\xi(t) = 2\lfloor 1/t\rfloor - 1/t$ pour $0 < t \leqslant 1$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3

▶ Notons $f : x \mapsto 1 + \arctan\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez l'ensemble de définition D_f de f, sous forme de réunion d'intervalles disjoints.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez la limite de f en chacune des bornes de chacun de ces intervalles.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que f est dérivable sur son ensemble de définition, et explicitez $f'(x)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Dressez le tableau des variations de f.

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

$\boxed{\text{Q6}}$ Décrivez l'image de f sous forme de réunion d'intervalles disjoints.

$\boxed{\text{Q7}}$ Calculez $f\big(1 + \sqrt{3}\big)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Résolvez l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{\pi}{3}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Explicitez le $DL_1(0)$ de f.

Tournez S.V.P.

Exercice 4

► Pour $n \geqslant 1$, notons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto x^n + x - 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Donnez un majorant *simple* de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

► Notons $\alpha_n = 1 - x_n$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que $n\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\ln(\alpha_n)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Quelle est la limite de la suite de terme général $-\ln(\alpha_n)$?

$\boxed{\text{Q8}}$ Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, qui divergent vers $+\infty$. On suppose $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.
Montrez que $\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ $\star\star$ En déduire un équivalent simple de $\ln(\alpha_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q10}}$ Finalement, quel développement asymptotique de x_n obtenez-vous ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Calculez la partie entière de $10x_3$.