Exercice 1

- Soient $\alpha \in [\![1,12]\!]$ le mois de votre anniversaire et $\beta \in [\![1,31]\!]$ le jour de votre anniversaire.
- Notons Φ l'application qui, à $P \in \mathbb{R}_3[X]$, associe le reste dans la division euclidienne de P par le polynôme $B = X^2 - \alpha X + \beta$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que Φ est un projecteur.

$\boxed{\text{Q3}}$ Explicitez le noyau, l'image et le rang de Φ.

$\boxed{\text{Q4}}$ Déterminez la trace de Φ, sans calculer sa matrice.

- Notons $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ la base canonique et A la matrice de Φ dans $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Que pouvez-vous dire de A^2 *sans aucun calcul* ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez A.

$\boxed{\text{Q7}}$ Sans longs calculs, montrez que $I_4 + A$ est inversible, et explicitez son inverse.