$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Devoir 2002/04}}$

▶ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2n} - x^n - x - 3$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_1(x) = 0$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles -1 est solution de l'équation $f_n(x) = 0$?

$\boxed{\text{Q3}}$ $\star\star$ Montrez que, dans l'intervalle $[0, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution, qui sera désormais notée x_n.

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour $n \geqslant 2$, prouvez l'encadrement $1 < x_n < 2$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Quel est le sens de variation de la suite de terme général x_n ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que cette suite converge. Pour l'instant, que pouvez-vous dire de sa limite ℓ ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $\alpha > 1$. Quelle est la limite de la suite de terme général $f_n(\alpha)$?

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire la valeur de ℓ.

▶ Nous nous proposons de montrer que $1 + \dfrac{1}{2n} < x_n < 1 + \dfrac{1}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q9}}$ Le nombre e est la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k!}$. Utilisez cette définition pour établir l'encadrement $\dfrac{8}{3} < e < 3$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Utilisez cet encadrement pour déterminer le signe de $e^2 - e - 4$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Quelle est la limite de la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$?

$\boxed{\text{Q12}}$ En déduire que la suite de terme général $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ converge vers $e^2 - e - 4$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez alors que $f_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ est strictement positif APCR.

$\boxed{\text{Q14}}$ En déduire la majoration $x_n < 1 + \dfrac{1}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q15}}$ En suivant la même démarche, montrez que l'on a $1 + \dfrac{1}{2n} < x_n$ APCR.

▶ Soit $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2t} - e^t - 4$. Nous allons établir $x_n - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$, où λ est la solution de l'équation $\varphi(t) = 0$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Déterminez λ.

$\boxed{\text{Q17}}$ Soit $k > 0$. Quelle est la limite de la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)^n$?

$\boxed{\text{Q18}}$ En déduire la limite de la suite de terme général $f_n\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Supposons $k > \lambda$. Montrez que $f_n\left(1 + \dfrac{k}{n}\right) > 0$ APCR ; en déduire $x_n < 1 + \dfrac{k}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q20}}$ Supposons maintenant $k < \lambda$. Montrez de la même façon que $x_n > 1 + \dfrac{k}{n}$ APCR.

$\boxed{\text{Q21}}$ Concluez !