Sup PCSI2 — Devoir 2002/01

► On note $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+t^2)$.

Q1 Prouvez que $f$ est de classe $\mathcal{D}^\infty$.

Q2 Explicitez $f'(t)$, $f''(t)$ et $f'''(t)$.

Q3 Pour $n \geqslant 1$, montrez que $f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}$ où $P_n$ est une fonction polynôme. Vous serez amené à exprimer $P_{n+1}(t)$ en fonction de $P_n(t)$ et $P'_n(t)$.

Q4 Explicitez $P_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Q5 Déterminez le degré et le coefficient dominant de $P_n$.

Q6 Déterminez la parité de $P_n$. Deux méthodes différentes sont envisageables.

Q7 Donnez les racines des fonctions polynômes $P_1$ à $P_5$ ; vous les écrirez sous la forme la plus simple possible.