$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 2001/10}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Problème 1 (source : banque agro 2001, épreuve A, problème 1)

► Notons E le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Notons $\mathbf{D} : f \in \mathrm{E} \mapsto f'$ et $\mathbf{Id} : f \in \mathrm{E} \mapsto f$. Il est clair que $\mathbf{D}$ et $\mathbf{Id}$ sont des endomorphismes de E.

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminez le noyau et l'image de $\mathbf{D}$.

► Notons $f_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha x}$, $f_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{\alpha x}$, $f_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha x}$ et $f_4 : x \in \mathbb{R} \mapsto xe^{-\alpha x}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une famille libre de vecteurs de E.

► Fixons un réel $\alpha > 0$. F_α est l'ensemble des fonctions de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$ où P et Q sont des polynômes de degré au plus égal à 1. Il est clair que F_α est une partie de E. Nous noterons $\mathbf{id}_\alpha$ la restriction de $\mathbf{Id}$ à F_α.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez rapidement que F_α est un s.e.v. de E.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $\mathcal{B}$ est une base de F_α.

$\boxed{\text{Q5}}$ 2 Montrez que $\mathbf{D}$ induit un endomorphisme $\mathbf{D}_\alpha$ de F_α.

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez la matrice M_α de $\mathbf{D}_\alpha$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que M_α est inversible.

$\boxed{\text{Q8}}$ Discutez le rang de $(\mathbf{D}_\alpha)^2 - \lambda\,\mathbf{id}_\alpha$ en fonction du réel λ. Remarque : $(\mathbf{D}_\alpha)^2$ désigne $\mathbf{D}_\alpha \circ \mathbf{D}_\alpha$.

► Notons $\psi = (\mathbf{D}_\alpha)^2 - \alpha^2\,\mathbf{id}_\alpha$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Déterminez une base du noyau de ψ.

$\boxed{\text{Q10}}$ Déterminez une base de l'image de ψ.

$\boxed{\text{Q11}}$ Prouvez que $(\mathbf{D}_\alpha)^4 - 2\alpha^2(\mathbf{D}_\alpha)^2 + \alpha^4\,\mathbf{id}_\alpha$ est l'endomorphisme nul de F_α.

$\boxed{\text{Q12}}$ En déduire une expression de $(\mathbf{D}_\alpha)^{-1}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Décrivez (sans preuve) l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - \alpha^2 y = 0$.

► Dans les quatre questions suivantes, Ψ désigne l'endomorphisme $\mathbf{D}^2 - \alpha^2\,\mathbf{Id}$ de E, et g désigne un élément du noyau de Ψ^2.

$\boxed{\text{Q14}}$ Déterminez le noyau de Ψ.

$\boxed{\text{Q15}}$ Prouvez l'existence de réels λ_1 et λ_3 tels que $\Psi(g) = \lambda_1 f_1 + \lambda_3 f_3$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Notons $h = g - \dfrac{\lambda_1}{2\alpha} f_2 + \dfrac{\lambda_3}{2\alpha} f_4$. Montrez que h appartient au noyau de $\mathbf{D}^2 - \alpha^2\,\mathbf{Id}$.

$\boxed{\text{Q17}}$ En déduire le noyau de Ψ^2.

$\boxed{\text{Q18}}$ Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y^{(4)} - 2\alpha^2 y'' + \alpha^4 y = 0$.

► $\mathcal{E}$ désigne l'équation différentielle $y^{(4)} - 2\alpha^2 y'' + \alpha^4 y = x^2 - 12x + 2$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Montrez que $\mathcal{E}$ possède une et une seule solution polynomiale, que vous noterez φ. Vous expliciterez $\varphi(x)$.

$\boxed{\text{Q20}}$ Déterminez l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$.

Tournez S.V.P.

Problème 2 : matrices de Hadamard

- n est un naturel non nul. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. La matrice identité d'ordre n est notée $\mathbf{I_n}$. La transposée de la matrice A est notée ${}^tA$.
- Une matrice de Hadamard d'ordre n est un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients appartiennent à l'ensemble $\mathbf{U} = \{+1, -1\}$ et qui vérifie la relation $A \cdot {}^tA = n\,\mathbf{I_n}$. L'ensemble des matrices de Hadamard d'ordre n sera noté $\mathcal{H}_n$.
- *Remarque* : vous avez le droit d'écrire 1 à la place de +1.

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez *tous* les éléments de $\mathcal{H}_2$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez *un* élément de $\mathcal{H}_4$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez que A est inversible, et explicitez son inverse.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si $A \in \mathcal{H}_n$, a-t-on nécessairement $A^{-1} \in \mathcal{H}_n$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Si $A \in \mathcal{H}_n$, a-t-on nécessairement ${}^tA \in \mathcal{H}_n$?

- Une matrice de Hadamard est *normalisée* si les coefficients de sa première ligne et de sa première colonne sont tous égaux à 1. Par exemple, $\begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Hadamard normalisée d'ordre 2.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez que si l'on multiplie une ligne ou une colonne de A par -1, la nouvelle matrice obtenue est encore dans $\mathcal{H}_n$.

- Δ_n désigne l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n, dont tous les coefficients diagonaux sont dans $\mathbf{U}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Quel est le cardinal de Δ_n ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $A \in \mathcal{H}_n$. Montrez qu'il existe un couple (G, D) d'éléments de Δ_n tels que $G \cdot A \cdot D$ soit une matrice de Hadamard normalisée.

$\boxed{\text{Q9}}$ Le couple (G, D) de la question précédente est-il unique ?

$\boxed{\text{Q10}}$ Montrez que si n est impair et distinct de 1, alors $\mathcal{H}_n$ est vide.

- $\left(\vec{e_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Fixons $A \in \mathcal{H}_n$. Pour $j \in [\![1,n]\!]$, notons $\vec{V_j} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_{i,j}\,\vec{e_i}$; ainsi, $\vec{V_j}$ est le j-ième vecteur colonne de la matrice A.

$\boxed{\text{Q11}}$ Soient j et k deux éléments de $[\![1,n]\!]$. Calculez le produit scalaire $\vec{V_j} \cdot \vec{V_k}$. Au besoin, vous distinguerez deux cas de figure.

- Notons $\vec{V} = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \vec{V_j}$ et $\vec{W} = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \vec{e_i}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Calculez $\|\vec{V}\|^2$ et $\|\vec{W}\|^2$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Calculez le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{W}$.

- Notons $\varphi(A) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} A_{i,j}$ la somme de tous les coefficients de A.

$\boxed{\text{Q14}}$ Établissez la majoration $\left|\varphi(A)\right| \leqslant n^{3/2}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Justifiez l'affirmation suivante : si n n'est pas un carré parfait, alors $\left|\varphi(A)\right| < n^{3/2}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Exhibez $A \in \mathcal{H}_4$ vérifiant $\varphi(A) = 4^{3/2}$ et $\mathrm{tr}(A) = -4$.

- Question subsidiaire, pour départager d'éventuels *ex-æquos*.

$\boxed{\text{Q17}}$ Soit A une matrice de Hadamard d'ordre n. Montrez que $B = \left(\begin{array}{c|c} +A & +A \\ \hline +A & -A \end{array}\right)$ est une matrice de Hadamard d'ordre $2n$.