Sup PCSI2 — Contrôle 2001/08

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (source : C9707)

► Notons $p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $q : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(3x)$, $r : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $s : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x)$ et $= \left\{ ap + bq + cr + ds \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$. Pour faciliter la rédaction, vous pourrez noter $\varphi_{a,b,c,d}$ la fonction $ap + bq + cr + ds$.

$\boxed{\text{Q1}}$ $\mathcal{C} = (p,q,r,s)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q3}}$ La famille $\mathcal{C}$ est-elle une base de ?

$\boxed{\text{Q4}}$ La fonction $f : x \mapsto \sin^3(x) - \cos^3(x)$ appartient-elle à ?

$\boxed{\text{Q5}}$ La fonction $g : x \mapsto 1$ appartient-elle à ?

$\boxed{\text{Q6}}$ La fonction $g : x \mapsto x$ appartient-elle à ?

$\boxed{\text{Q7}}$ La fonction D : $\varphi \mapsto \varphi'$ est-elle un endomorphisme de ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Quelle est la matrice A de D dans la base $\mathcal{C}$?

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, explicitez A^n ; vous distinguerez deux cas de figure, selon la parité de n.

$\boxed{\text{Q10}}$ La fonction D est-elle un automorphisme de ?

$\boxed{\text{Q11}}$ Explicitez la matrice inverse A^{-1} de A.

Exercice 2 (source : C9608)

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; soient u et v deux éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Justifiez l'existence de la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

Justifiez également la dérivabilité de g.

► Dans toute la suite, nous prenons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\,dt$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez $g'(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ $\star$ En déduire le développement limité à l'ordre 5 de g au voisinage de 0.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est la parité de g ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $x \neq 0$, établir $g\left(\dfrac{1}{2x}\right) = g(x)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $t \neq 0$, établissez l'encadrement $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire, pour $x > 0$, l'encadrement $\arctan(2x) - \arctan(x) \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ $\star$ Soit $H : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \big(\arctan(2t) - \arctan(t)\big)\,dt$. Explicitez $H(x)$ et calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{\ln(x)}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ $\star$ Déduisez de l'étude précédente un équivalent *simple* de $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ lorsque x tend $+\infty$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 (source : ESTP 1995 ; C9511)

► désigne le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. **H** désigne le $\mathbb{R}$-e.v.$\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}\big)$. Soit $f \in$; nous lui associons $(f) \in \mathbf{H}$, définie par

$$\big((f)\big)(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,dt \qquad \text{pour tout } x > 0$$

Vous noterez soigneusement le rôle des parenthèses dans $\big((f)\big)(x)$.

Q1 Dans le cadre de ce problème, la notation $\big(f(x)\big)$ a-t-elle un sens ?

Q2 Justifiez *brièvement* l'existence de (f).

Q3 Montrez que est une application linéaire.

► Dans les quatre questions suivantes, f désigne la fonction exponentielle : $f(t) = e^t$. Nous notons $F = (f)$.

Q4 Au moyen d'un changement de variable *très simple*, montrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q5 Simplifiez alors $G(x) = F(x) + F'(x)$ pour $x > 0$.

Q6 Rappelez le $DL_n(0)$ de la fonction $\varphi :\ u > -1 \mapsto \dfrac{1}{1+u}$.

Q7 Déterminez des constantes a, b et c telles que $G(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x^3} + o\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)$.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $f_n :\ t \in [0,1] \mapsto t^n$, et ${}_n = (f_n)$.

Q8 Calculez ${}_0(x)$ pour $x > 0$.

Q9 Écrivez une relation liant ${}_{n+1}(x)$ et ${}_n(x)$ pour $x > 0$. Indication : $t = (x+t) - x$.

Q10 En déduire ${}_n(x) = (-x)^n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big) + P_n(x)$, où P_n est une fonction polynôme que vous expliciterez.

Q11 Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n.

Q12 Que pouvez-vous dire de la famille $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$?