Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice (souvenirs du baccalauréat de 1980)

► *Les questions de cet exercice sont totalement indépendantes. Elles doivent néanmoins être rédigées sur une copie séparée (plusieurs, au besoin).*

Q1 Question posée au baccalauréat, série E, session de juin 1980 (sujet posé dans l'académie de Bordeaux). Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \big((\sqrt{3}+i)+(-1+i)\big)z + (\sqrt{3}+i)(-1+i) = 0$. *Remarque* : on peut répondre en trois lignes, sans aucun calcul.

Q2 Question posée au baccalauréat, série C, session de juin 1980 (sujet posé dans l'académie de Lyon). Soit $\alpha \in \left]0, \pi\right[$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 \sin^2(\alpha) - 4z\sin(\alpha) + 4 + \cos^2(\alpha) = 0$.

Q3 Question posée au baccalauréat, série C, session de juin 1980 (sujet posé en Nouvelle-Calédonie et aux S.H.N.). Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - (1+2i)z^2 - (1-9i)z - 2(1+5i) = 0$ sachant qu'elle possède une solution réelle.

Q4 Question posée au baccalauréat, série C, session de juin 1980 (sujet posé au Sénégal). Linéarisez $\sin^3(x)$, puis calculez $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\sin^3(x)\,dx$. *Remarque* : seules les IPP rigoureusement justifiées seront prises en compte.

Q5 Question posée au baccalauréat, série C, session de juin 1980 (sujet posé dans l'académie de Grenoble). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \left]0, \pi\right[$. Donnez une expression simple de $C_n(\varphi) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos^k(\varphi)\cos(k\varphi)$.

Tournez S.V.P.

Problème (d'après ECRICOME 2001 option éco.)

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f_n : x \mapsto \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{x+k} - 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n} - 1$. Nous nous intéresserons à l'équation $f_n(x) = 0$, que nous noterons $\mathcal{E}_n$.

Q1 Décrivez avec précision l'ensemble de définition de f_n, en utilisant les mots « réunion » et « intervalle ».

Q2 Résolvez $\mathcal{E}_1$.

Q3 ⋆⋆⋆ Montrez que les solutions de $\mathcal{E}_n$ sont exactement les solutions d'une équation algébrique de degré $n+1$, que vous écrirez en utilisant les symboles $\sum$ et $\prod$.

Q4 Quel est le nombre maximal de solutions réelles de $\mathcal{E}_n$?

► Vous pourrez utiliser le résultat suivant, qui est un cas particulier du théorème de la bijection : si g est une fonction définie sur l'intervalle $\mathcal{I} =]a, b[$, à valeurs réelles, continue et strictement décroissante sur $\mathcal{I}$, alors g réalise une bijection de $\mathcal{I}$ sur l'intervalle $\left]\lim_{x \to b^-} g(x), \lim_{x \to a^+} g(x)\right[$.

Q5 Montrez que l'équation $\mathcal{E}_n$ n'a aucune solution dans l'intervalle $]-\infty, -n[$.

Q6 Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Montrez que l'équation $\mathcal{E}_n$ possède exactement une solution dans l'intervalle $]-k, -k+1[$.

Q7 Montrez que l'équation $\mathcal{E}_n$ possède exactement une solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Dans la suite, cette solution sera notée x_n ; on a donc $f_n(x_n) = 0$ et $x_n > 0$.

Q8 L'équation $\mathcal{E}_n$ possède-t-elle des solutions non réelles ?

► Nous nous intéressons au comportement de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

Q9 Quel est le signe de $f_{n+1}(x_n)$?

Q10 Utilisez le résultat précédent pour donner le sens de variation de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

Q11 Justifiez *rapidement* la majoration $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{n+1+k} < 1$.

Q12 Utilisez le résultat précédent pour exhiber un majorant simple de x_n.

Q13 À ce stade du problème, peut-on dire si la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge ou diverge ?

Q14 Soient $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Justifiez l'encadrement $\frac{1}{x+k+1} \leqslant \ln\left(\frac{x+k+1}{x+k}\right) \leqslant \frac{1}{x+k}$.

Q15 Sommez l'encadrement précédent en faisant décrire à k un intervalle discret bien choisi, pour établir :

$$f_n(x) + 1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leqslant f_n(x) + 1 - \frac{1}{x+n}$$

Q16 Quel encadrement de $\ln\left(1 + \frac{n}{x_n}\right)$ pouvez-vous en déduire ?

Q17 Que pouvez-vous affirmer, maintenant, au sujet de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$?

Q18 Quelle est la limite de la suite de terme général $\ln\left(1 + \frac{n}{x_n}\right)$?

Q19 Quelle est la limite de la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$?