Sup PCSI2 — Contrôle 2001/01

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Rappelez les deux définitions équivalentes de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ du réel x.

Q2 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{Z}$. Prouvez l'égalité $\lfloor x+q \rfloor = \lfloor x \rfloor + q$.

► Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous nous proposons d'établir la formule d'Hermite :

$$\lfloor nx \rfloor = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor$$

Notons $y = x - \lfloor x \rfloor$; on a donc $y \in [0,1[$.

Q3 Montrez qu'il suffit d'établir la relation $\lfloor ny \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor y + \frac{k}{n} \right\rfloor$.

Q4 Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\left\lfloor y + \dfrac{k}{n} \right\rfloor$?

Q5 Notons $p = \lfloor ny \rfloor$. Quelles sont les valeurs que peut prendre p ?

Q6 Terminez la démonstration !

Exercice 2

► Pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, notons $S_n^p = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p$. Rappel : $S_n^1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $S_n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Q1 Donnez une expression simple de S_n^3, preuve à l'appui !

Q2 Pour $n \geqslant 1$, notons $r_n = \dfrac{S_n^4}{S_n^2}$. Recopiez le tableau suivant, en le complétant. Vous réduirez au besoin les fractions, dans la dernière ligne. Les calculs ne doivent pas apparaître sur votre copie.

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9			
S_n^2	1	5	14			
n^4	1	16	81			
S_n^4	1	17	98			
r_n	1	17/5	7			

► Il semble intéressant d'étudier la suite de terme général $u_n = 5r_n$.

Q3 Donnez la valeur de u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, puis celle de $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Q4 Quelle conjecture formulez-vous concernant la valeur de v_n ? Quelle serait alors l'expression de u_n ? Quelle serait alors l'expression de S_n^4 ?

Q5 $\star$ Au moyen d'un raisonnement par récurrence, établissez la validité de la formule conjecturée précédemment pour S_n^4.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► Nous nous intéressons à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations $u_0 = 0$ et $u_n = 1 + u_{\lfloor 2n/3 \rfloor}$. Vous noterez bien qu'il n'est pas immédiat que ces deux relations définissent *effectivement* une suite de réels.

$\boxed{\text{Q1}}$ Recopiez le tableau suivant, en le complétant ; les calculs ne doivent pas apparaître sur votre copie.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lfloor 2n/3 \rfloor$	0	0	1	2	2						
$u_{\lfloor 2n/3 \rfloor}$	0	0	1	2	2						
u_n	0	1	2	3	3						

► Nous nous proposons de calculer u_{37}.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quels sont les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'il est nécessaire de calculer ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez ces termes et obtenez la valeur de u_{37}.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que, si l'on connaît u_k pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, alors on peut calculer u_{n+1}.

► Ceci prouve que les deux relations de l'énoncé définissent *effectivement* une suite de réels.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, quelles sont les valeurs possibles de $u_{n+1} - u_n$? Bien entendu, on vous demande de prouver que ce que vous affirmez est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$; il ne suffit pas de regarder le tableau rempli à la question 1.

$\boxed{\text{Q6}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?