Sup PCSI2 — Contrôle 2000/10

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (E.M. Lyon 2001)

Q1 Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Justifiez l'existence de la fonction $F : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x \big(f(t)+f(t^2)\big)\,dt$.

Q2 Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Vous expliciterez $F'(x)$.

Q3 Montrez que si f est de classe $\mathcal{C}^k$, alors F est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

► Notons désormais Φ la fonction qui, à $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ associe $\Phi(f) = F$ où F a été définie à la question 1.

Q4 Soient $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Des trois notations $\big(\Phi(f)\big)(x)$, $\Phi\big(f(x)\big)$ et $\Phi(f)(x)$, lesquelles ont un sens ?

Q5 Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Combien vaut $\big(\Phi(f)\big)(0)$?

Q6 Φ est-il surjectif ?

Q7 Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Q8 Nous savons que $\mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrez que ce s.e.v. est stable par Φ.

► Dans les cinq questions suivantes, nous étudions l'injectivité éventuelle de Φ. Soit $f \in \ker(\Phi)$.

Q9 Soit $t \in [0,1]$. Quelle relation simple existe-t-il entre $f(t)$ et $f(t^2)$?

Q10 Combien valent $f(0)$ et $f(1)$?

► Supposons qu'il existe $x \in \,]0,1[$ tel que $f(x) \neq 0$.

Q11 Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = (x_n)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la limite de cette suite ?

Q12 Observez la suite de terme général $f(x_n)$ et mettez en évidence une contradiction.

Q13 Φ est-il injectif ?

► Intéressons-nous à l'action de Φ sur $\mathbb{R}[X]$. Nous identifierons $P \in \mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme associée, que nous considérerons comme un élément de $\mathcal{C}^\infty\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

Q14 Montrez que $\mathbb{R}[X]$ est un s.e.v. de $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ stable par Φ.

Q15 Explicitez $\Phi(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Q16 Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$, autre que le polynôme nul. Notons n le degré de P. Quel est le degré de $\Phi(P)$?

Q17 Soit $q \in \mathbb{N}$; notons Φ^q le q-ième itéré de Φ. Calculez le degré d_q de $\Phi^q(X)$.

► Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont 0 est racine.

Q18 Montrez que $\mathcal{E}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$, et qu'il est stable par Φ.

Q19 L'endomorphisme de $\mathcal{E}$ induit par Φ est-il surjectif ?

► Un peu de calcul pour finir.

Q20 Soient $f : t \in [0,1] \mapsto \ln(1+t)$ et $F = \Phi(f)$. Explicitez $F(x)$, pour $x \in [0,1]$.

Tournez S.V.P.

Exercice 2 (source : concours ESC 2001, option économique)

▶ Notons $f : x \in [0,1] \mapsto 2xe^x$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle que vous préciserez.

▶ Notons désormais f^{-1} la bijection réciproque de f.

$\boxed{\text{Q2}}$ Dressez les tableaux de variation respectifs de f et f^{-1}.

$\boxed{\text{Q3}}$ f^{-1} est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que l'équation $xe^x = 1$ possède, dans l'intervalle $[0,1]$, une et une seule solution, qui sera notée α dans la suite.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que les relations $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$ définissent *effectivement* une suite de réels, qui appartiennent tous à l'intervalle $]0,1]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $x \in [0,1]$, quel est le signe de $f(x) - x$?

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et explicitez sa limite.

▶ Nous nous proposons, dans la suite, de déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, établissez la relation $2^n u_n = \exp(-S_n)$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Utilisez cette relation pour obtenir un majorant simple de S_n.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrez alors la convergence de la suite de terme général S_n. Notons désormais $L = \lim_{n\to\infty} S_n$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Justifiez l'encadrement $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Donnez un équivalent *simple* de u_n lorsque n tend vers l'infini.