Sup PCSI2 — Contrôle 2000/07

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (C9508)

► Soient f et g deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Nous notons $h = f \circ g - g \circ f$.

Q1 Montrez que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si $h\big(\operatorname{im}(g)\big) \subset \ker(f)$.

► Nous supposons désormais que $f \circ g$ est un projecteur.

Q2 Montrez que $\operatorname{im}(f \circ g) = \big(\ker(f) + \operatorname{im}(g)\big) \cap \operatorname{im} f$.

Q3 Montrez que $\ker(f \circ g) = g^{-1}\big(\ker(f)\big)$.

Q4 Montrez que $\ker(f \circ g) = \big(\ker(f) \cap \operatorname{im}(g)\big) \oplus \ker(g)$.

Exercice 2 (C9706)

► p, q et r sont trois endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E qui vérifient $p \circ q = r$, $q \circ r = p$ et $r \circ p = q$.

Q1 Montrez que p, q et r ont même noyau et même image.

Q2 Établissez $p^2 = q^2 = r^2$; bien entendu, p^2 désigne $p \circ p$.

Q3 Établissez $q^5 = q$ (considérez p^2qp^2).

Q4 Prouvez que $E = \ker(q) \oplus \operatorname{im}(q)$.

Q5 Prouvez que $\operatorname{im}(p)$ est stable par p, q et r.

Q6 Prouvez que les endomorphismes de $\operatorname{im} p$ induits par p, q et r sont des automorphismes.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 (C9609)

► Notons $p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $q : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$, $r : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $s : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

Q1 $\mathcal{B} = (p, q, r, s)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Q2 Soient a et b deux réels. Montrez qu'il existe un réel φ tel que $a\cos(u) + b\sin(u) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(u - \varphi)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Vous noterez bien que φ ne dépend pas de u.

► Soient a, b, α et β quatre réels. Notons $k_{a,b,\alpha,\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto a\cos(x - \alpha) + b\cos(2x - \beta)$. Notons l'ensemble des $k_{a,b,\alpha,\beta}$, où (a, b, α, β) appartient à $\mathbb{R}^4$.

Q3 ⋆ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Q4 La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de ?

Q5 La fonction $g : x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$ appartient-elle à ?

Q6 La fonction $h : x \mapsto 1$ appartient-elle à ?

Q7 La fonction $h : x \mapsto x$ appartient-elle à ?

Q8 La fonction $\mathcal{D} : f \mapsto f'$ est-elle un endomorphisme de ?

Q9 Quelle est la matrice $\mathbf{M}$ de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$?

Q10 La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de ?

Q11 Quelle est la matrice inverse $\mathbf{M}^{-1}$ de $\mathbf{M}$?