Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Énoncez et démontrez la formule donnant une expression simple de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} q^k$.

► Pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(k+1)3^k$ et $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} x^{k+1}$.

Q2 Dressez un tableau donnant les valeurs de $u_n = 3^n$, $v_n = (n+1)u_n$ et S_n pour $n \in [\![1,4]\!]$.

Q3 Justifiez l'affirmation suivante : S_n est un multiple de 3.

Q4 Quelle expression simple de $f_n(x)$ connaissez-vous ?

Q5 Donnez deux expressions différentes de $f_n'(x)$, pour $x \neq 1$.

Q6 En déduire une expression simple de S_n.

Q7 En faisant apparaître $A_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} k3^k$ dans S_n puis dans $3S_n$, retrouvez le résultat de la question 6.

Q8 Donnez deux commandes Maple, l'une pour évaluer *formellement* S_n, l'autre pour évaluer *numériquement* S_n.

Exercice 2

► On note f l'application qui, au réel x, associe le relatif $\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor$.

Q1 Quelle est la valeur de $f(x)$ lorsque $0,5 \leqslant x < 1$?

Q2 Montrez que f est croissante.

Q3 f est-elle strictement croissante ?

Q4 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$.

Q5 Montrez que l'équation $f(x) = 5$ ne possède aucune solution réelle.

Q6 Donnez une relation simple liant $f(x+1)$ et $f(x)$.

Q7 Quelle transformation simple conserve globalement la courbe représentative de f ?

Q8 Tracez la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle [0,2].

Q9 Donnez deux commandes Maple pour définir la fonction f, puis pour tracer la courbe représentative de sa restriction à l'intervalle $[0,2]$.

Exercice 3

► Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Pour $n \geqslant 2$, établissez l'inégalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Q2 Pour $n \geqslant 1$, établissez l'inégalité $4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n}$.

Q3 Pour $n \geqslant 1$, établissez l'inégalité $\displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n}(2k+1)! \geqslant \big((n+1)!\big)^{n+1}$.