$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Corrigé du devoir 2000/03}}$

$\boxed{\text{Q1}}$ P est de degré $2n$, donc $P^{(2n+1)}(x) = 0$; ainsi :

$$F'(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k+1)}(x) = \sum_{0 \leqslant k < n} (-1)^k P^{(2k+1)}(x)$$
$$F''(x) = \sum_{0 \leqslant k < n} (-1)^k P^{(2k+2)}(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} P^{(2k)}(x) = -\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k)}(x)$$

Avec un télescopage, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} G'(x) &= F''(x)\sin(x) + F'(x)\cos(x) - F'(x)\cos(x) + F(x)\sin(x) = \big(F''(x) + F(x)\big)\sin(x) \\ &= \Bigg(-\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k)}(x) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k)}(x)\Bigg)\sin(x) = P(x)\sin(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Calcul immédiat :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P(x)\sin(x)\,dx &= \int_0^\pi G'(x)\,dx = \big[G(x)\big]_0^\pi = G(\pi) - G(0) \\ &= F'(\pi)\sin(\pi) - F\cos(\pi) - \big(F'(0)\sin(0) - F(0)\cos(0)\big) = F(\pi) + F(0) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q3}}$ Appliquons la formule de LEIBNIZ :

$$P^{(j)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{0 \leqslant k \leqslant j} \binom{j}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^n)\frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}\big((a-bx)^n\big) = \frac{1}{n!}\sum_{0 \leqslant k \leqslant j} \binom{j}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{d^{j-k}}{dx^{j-k}}\big((a-bx)^n\big)$$

Mais $0 \leqslant k \leqslant j < n$, donc $n - k > 0$; si nous évaluons $P^{(j)}(0)$, tous les termes sont nuls, donc $P^{(j)}(0) = 0$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Il y avait une coquille dans l'énoncé original : il fallait lire $j \in [\![0,n]\!]$. $P(x) = \dfrac{x^n}{n!}\displaystyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j} (-bx)^j a^{n-j}$.

Donc le coefficient de x^{n+j} dans l'expression développée de $P(x)$ est :

$$[x^{n+j}]P(x) = \frac{\binom{n}{j}(-b)^j a^{n-j}}{n!} = \frac{(-b)^j}{j!} \times \frac{a^{n-j}}{(n-j)!}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ $\dfrac{d^{n+j}}{dx^{n+j}}(x^k)$ est nul si $k < n + j$; et c'est un monôme de degré non nul si $k > n + j$. Donc, lorsque nous évaluons $P^{(n+j)}(0)$, il ne reste que le terme constant du polynôme $P^{(n+j)}$. Mais ce terme constant est égal au produit du coefficient de x^{n+j} dans l'expression développée de $P(x)$, par $\dfrac{d^{n+j}}{dx^{n+j}}(x^{n+j}) = (n+j)!$. Nous trouvons donc $P^{(n+j)}(0) = \dfrac{(-b)^j}{j!} \times \dfrac{a^{n-j}}{(n-j)!} \times (n+j)! = \dfrac{(n+j)!(-b)^j a^{n-j}}{j!(n-j)!}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ $F(0) = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k)}(0)$. D'après le résultat de la question 3, nous avons $P^{(2k)}(0) = 0$ si $2k < n$. D'autre part, si $2k \geqslant n$, alors, en notant $j = 2k - n$, nous aurons $P^{(2k)}(0) = P^{(n+j)}(0) = \dfrac{(n+j)!}{j!(n-j)!}(-b)^j a^{n-j}$. Remarquons que $(-b)^j$ et a^{n-j} sont des relatifs ; et que $\dfrac{(n+j)!}{j!(n-j)!} = (n+1)(n+2)\ldots(n+j)\dbinom{n}{j}$ est aussi un relatif. Donc $P^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ $P(\pi - x) = P\Big(\dfrac{a}{b} - x\Big) = \dfrac{1}{n!}\Big(\dfrac{a}{b} - x\Big)^n \Big(a - b\Big(\dfrac{a}{b} - x\Big)\Big)^n = \dfrac{1}{n!}\Big(\dfrac{a}{b} - x\Big)^n x^n = P(x)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Par dérivation, nous obtenons $P'(\pi - x) = -P'(x)$, puis $P''(\pi - x) = P''(x)$ et plus généralement $P^{(2k)}(\pi - x) = P^{(2k)}(x)$. Nous en déduisons

$$F(\pi - x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k)}(\pi - x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k P^{(2k)}(x) = F(x)$$

En particulier, $F(\pi) = F(0)$ et donc $F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Utilisons le résultat de la question 2, ce qui est licite puisque notre polynôme P est de degré $2n$. Alors $I_n = F(0) + F(\pi)$; or nous venons de montrer que ces deux nombres sont dans $\mathbb{Z}$. Donc $I_n \in \mathbb{Z}$. Mais la fonction $x \in [0, \pi] \mapsto \dfrac{x^n(a - bx)^n}{n!} \sin(x)$ est à valeurs positives puisque $\sin(x) \geqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ et $a - bx \geqslant a - b\pi = 0$ pour $x \in [0, \pi]$; donc $I_n \in \mathbb{N}$. De plus, cette fonction est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), et ne s'annule qu'aux extrémités de l'intervalle $[0, \pi]$: donc $I_n \neq 0$ et par suite $I_n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Nous allons majorer $|I_n|$ par le terme général d'une suite qui convergera vers 0 manifestement. Remarquons que $0 \leqslant \pi$; et, pour $x \in [0, \pi]$, nous aurons certainement $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $0 \leqslant P(x) \leqslant \dfrac{\pi^n a^n}{n!}$. Donc :

$$|I_n| = \left| \int_0^\pi P(x) \sin(x)\, dx \right| \leqslant \int_0^\pi \bigl|P(x) \sin(x)\bigr|\, dx \leqslant \int_0^\pi \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}\, dx \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi^n a^n}{n!}\, dx = \frac{\pi^{n+1} a^n}{n!}$$

Les règles de croissances comparées nous assurent que $\dfrac{\pi^{n+1} a^n}{n!} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Q11}}$ La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, donc minorée par 1. À ce titre, elle ne peut converger vers 0. Nous mettons ainsi en évidence une contradiction, ce qui termine la preuve.

Notes. L'irrationnalité de π a été établie par Lambert ; en 1767, il présente à l'Académie de Berlin un mémoire, dans lequel il montre que, si x est rationnel, alors ni e^x ni $\arctan(x)$ ne le sont (hormis le cas $x = 0$) ; en particulier, $\pi = 4 \arctan(1)$ n'est pas rationnel.
La transcendance de π, c'est-à-dire le fait que π n'est solution d'aucune équation algébrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$, a été établie par Lindemann en 1882.
La preuve donnée ici a été imaginé par Ivan Niven ; référence : *A Simple Proof that π is Irrational*, Bulletin of the American Mathematical Society., vol. 53, 1947, p. 509. On en trouve une version français dans le livre *Raisonnements divins* (le titre original est *Proofs from the Book* ; le titre français est l'adaptation particulièrement crétine qu'en a donnée un commercial de Springer).