

Irrationalité de π (concours ENSAIS architectes 2000)

- Nous nous proposons de prouver que $\pi \notin \mathbb{Q}$. Pour ce faire, nous allons raisonner par l'absurde, en supposant $\pi = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P une fonction polynôme de degré $2n$; définissons deux fonctions :

$$F : x \mapsto \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k P^{(2k)}(x) \quad \text{et} \quad G : x \mapsto F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)$$

Q1 Explicitez $G'(x)$.

Q2 En déduire $\int_0^\pi P(x) \sin(x) dx = F(0) + F(\pi)$.

- Désormais, P est définie par $P(x) = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$.

Q3 Pour $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, prouvez que $P^{(j)}(0) = 0$.

Q4 Calculez le coefficient de x^{n+j} dans l'expression développée de $P(x)$, pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q5 Calculez $P^{(n+j)}(0)$.

Q6 Prouvez que $F(0) \in \mathbb{Z}$.

Q7 Montrez que $P(\pi - x) = P(x)$ pour tout réel x .

Q8 Prouvez que $F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Q9 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} \sin(x) dx$. Montrez que $I_n \in \mathbb{N}^*$.

Q10 Montrez que la suite de terme général I_n converge vers 0.

Q11 Concluez !